

实半单李代数

Real Semisimple Lie Algebras

严志达 著

$\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_0 e^{adH}$

南开大学出版社

天津市科协自然科学学术
专著基金资助出版

实半单李代数

严志达 著

南开大学出版社

实半单李代数

严志达 著

南开大学出版社出版

（天津八里台南开大学校内）

邮编 300071 电话 23508542

新华书店天津发行所发行

河北省永清县第一胶印厂印刷

1998年10月第1版 1998年10月第1次印刷

开本：850×1168 1/32 印张：8.875

字数：220千 印数：1—1000

ISBN 7-310-01092-2

O·106 定价：25.00元

前　言

李群和李代数的理论起始于上世纪末，已有比较久远的历史．在其建立的开始，就表现出在理论和应用上的重要价值．尤其在本世纪 20 年代， E. Cartan 的 Riemann 对称空间理论出现后，指出了李群理论，特别是半单李群和微分几何学的一个极重要的内在关系． E. Cartan 的这个工作在近代数学中可以说有着很大的影响，引起各种推广和应用． Riemann 对称空间的研究在一定意义上，归结为半单李群的研究，而半单李群的研究又归结为实半单李代数的研究．作者 1963 年应中国科学院数学研究所的邀请，系统地讲述了本人在实半单李代数方面的工作．

本书的材料最初是作者 1963 年在中国科学院数学所所作的报告． 1978 年江家福同志在执掌广西民族学院时，将他保存的讲义整理、重新油印，并附加了作者关于非紧局部对称空间的两篇文章 (附录 I, II)，其中附录 II 的内容是从未发表过的．重印讲义才使这方面的一些工作在“文革”中未尽散失． 1979 年孟道骥同志又在南开大学数学系的李群李代数的讨论班报告了这本讲义，并作了许多补充．此讲义的部分内容收入了作者与许以超所著《Lie 群及其 Lie 代数 》一书中，但由于篇幅所

限，未能将所有内容收入该书.

虽然几十年过去了，但是仍有不少同志认为作者在这方面的工作是很有价值的，对他们的工作是有助益的，希望作者出版一本这方面的书. 为满足同志们的希望，今天我们将广西民族学院的油印本整理、补充，修订出版. 我们相信它有一定的参考价值和纪念价值. 这次添加了附录 Ⅲ，多少反映这些理论及在几何应用上的某些进展. 附录 Ⅲ 的内容是侯自新同志建议，梁科同志执笔的.

我们感谢邓少强、白承铭、胡乃红、朱林生、靳全勤等同志为本书的整理付出了辛勤的劳动. 同样我们感谢本书的责任编辑裴志明同志及南开大学出版社的有关同志. 最后感谢国家自然科学基金委员会 (19671045 号项目)、国家教委博士点基金 (97005511 号项目)、天津市教委和天津市科协自然科学学术专著基金的慷慨资助.

严志达

1997 年 10 月于南开大学

目　录

第一章　基本概念

1.1　复李代数的实形式　实李代数的复化

1.1.1　实向量空间的容许复结构

定义 1　设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的向量空间. 如果存在一个线性变换 J 使得

$$J^2 = -I, \tag{1.1.1}$$

这里 I 是恒等对应，则称 J 为 V 的一个 **容许复结构**.

命题 1　设 $\mathbf{C}$ 是复数域，实向量空间 V 容许一个复结构 J. 对任何 $x \in V$, $\lambda + i\mu \in \mathbf{C}$ ($\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$, $i = \sqrt{-1}$) 可定义数乘:

$$(\lambda + i\mu)x = \lambda x + \mu J x. \tag{1.1.2}$$

对此数乘与原来的加法构成 $\mathbf{C}$ 上的向量空间，记为 $\overline{V}$.

证　事实上，只要验证两个分配律与数乘的结合律:

$$\begin{aligned}(\lambda + i\mu)(x + y) &= \lambda(x + y) + \mu J(x + y)\\ &= (\lambda x + \mu J x) + (\lambda y + \mu J y)\\ &= (\lambda + i\mu)x + (\lambda + i\mu)y;\end{aligned}$$

$$((\lambda_1 + i\mu_1) + (\lambda_2 + i\mu_2))x = (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\mu_1 + \mu_2)Jx$$
$$= (\lambda_1 + i\mu_1)x + (\lambda_2 + i\mu_2)x;$$

$$\begin{aligned}
&((\lambda_1 + i\mu_1)(\lambda_2 + i\mu_2))x \\
&= (\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2)x + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)Jx \\
&= \lambda_1(\lambda_2 x + \mu_2 Jx) + \mu_1 J(\lambda_2 x + \mu_2 Jx) \\
&= (\lambda_1 + i\mu_1)((\lambda_2 + i\mu_2)x),
\end{aligned}$$

$\forall x,\ y \in \overline{V},\ \lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu,\ \mu_1,\ \mu_2 \in \mathbf{R}$. □

命题 2 J 是实空间 V 的一个容许复结构，$\overline{V}$ 是相应的复空间. 若 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 是 $\overline{V}$ 的一组基，则 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ Jx_1,\ Jx_2,\ \ldots,\ Jx_n$ 是 V 的一组基. 因而

$$\dim \overline{V} = \frac{1}{2}\dim V. \tag{1.1.3}$$

证 因 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 是 $\overline{V}$ 的基，故对任何 $\alpha_k \in \mathbf{C},\ k = 1, 2, \ldots, n,\ \alpha_k = \lambda_k + i\mu_k,\ \lambda_k,\ \mu_k \in \mathbf{R}$ 有

$$\begin{aligned}
\sum_k \alpha_k x_k = 0 &\iff \alpha_k = 0 \\
&\iff \lambda_k = \mu_k = 0, \quad 1 \le k \le n.
\end{aligned}$$

而 $\sum\limits_k \alpha_k x_k = \sum\limits_k (\lambda_k + i\mu_k)x_k = \sum\limits_k (\lambda_k x_k + \mu_k Jx_k)$. 故有

$$\sum_k \lambda_k x_k + \mu_k Jx_k = 0 \iff \lambda_k = \mu_k = 0, \quad 1 \le k \le n.$$

故 $x_1, x_2, \cdots, x_n, Jx_1, Jx_2, \cdots, Jx_n$ 线性无关.

又 $\forall y \in V$, 亦有 $y \in \overline{V}$, 故有

$$y = \sum \alpha_k x_k = \sum (\lambda_k x_k + \mu_k Jx_k),$$

因而 x_1, x_2, $\ldots$, x_n, Jx_1, Jx_2, $\ldots$, Jx_n 生成 V, 即 x_1, x_2, $\ldots$, x_n, Jx_1, Jx_2, $\ldots$, Jx_n 是 V 的基. 于是 (1.1.3) 成立. □

定义 2 设 E 为复向量空间, 自然 E 亦可作为实向量空间, 记为 E^R. 显然 $Jx = ix$ 是 E^R 的容许复结构, 而且 $\overline{E^R} = E$. 此时称 J 为 **正则复结构**.

若 e_1, e_2, $\ldots$, e_n 为 E 的基, 则 e_1, e_2, $\ldots$, e_n, ie_1, ie_2, $\ldots$, ie_n 为 E^R 的基.

命题 3 J 为实空间 V 的容许复结构, $\overline{V}$ 是相应的复空间. $\overline{V}$ 的一个线性变换 A 自然是 V 的线性变换. 而且若 A 关于 $\overline{V}$ 的基 x_1, x_2, $\ldots$, x_n 的矩阵是 $A_1 + iA_2$ (A_1, A_2 是实矩阵), 则 A 作为 V 的线性变换关于基 x_1, x_2, $\ldots$, x_n, Jx_1, Jx_2, $\ldots$, Jx_n 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}.$$

证 事实上, 设 $A_1 = (a^1_{k\,l})$, $A_2 = (a^2_{k\,l})$, 则

$$\begin{aligned} Ax_k &= \sum_l (a^1_{l\,k} + ia^2_{l\,k})x_l \\ &= \sum_l a^1_{l\,k}x_l + \sum_l a^2_{l\,k}Jx_l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AJx_k &= i(Ax_k) = \sum (ia^1_{l\,k} - a^2_{l\,k})x_l \\ &= \sum_l (-a^2_{l\,k})x_l + \sum a^1_{l\,k}Jx_l. \end{aligned}$$

□

反过来, V 的线性变换 ρ 不一定是 $\overline{V}$ 的线性变换. 但有下面结论.

命题 4 V 的线性变换 ρ 是 $\overline{V}$ 的线性变换当且仅当

$$\rho J = J\rho. \tag{1.1.4}$$

证 事实上, $\forall x,\ y \in \overline{V}$, 即 $x,\ y \in V$, 显然有 $\rho(x+y) = \rho(x) + \rho(y)$. 而

$$\rho((\lambda + i\mu)x) = \rho(\lambda x + \mu Jx) = \lambda\rho(x) + \mu\rho(Jx),$$

$$(\lambda + i\mu)\rho(x) = \lambda\rho(x) + \mu J\rho(x),$$

故 ρ 是 $\overline{V}$ 的线性变换当且仅当 $\rho((\lambda+i\mu)x) = (\lambda+i\mu)\rho(x)$, 当且仅当 (1.1.4) 成立. □

特别, 变换 J 亦为 $\overline{V}$ 的线性变换, 而且 $J = iI$. 若 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 是 $\overline{V}$ 的基, J 作为 V 的线性变换关于基 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ Jx_1,\ Jx_2,\ \ldots,\ Jx_n$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I_n 为 n 阶单位方阵.

设 V 的线性变换 ρ 关于基 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ Jx_1,\ Jx_2,\ \ldots,\ Jx_n$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

则 $\rho J = J\rho \iff A = D, B = -C$. 此时 ρ 作为 $\overline{V}$ 的线性变换关于基 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 的矩阵是 $A + iC$ $(i = \sqrt{-1})$.

1.1.2 实向量空间的复化

命题 5 设 W 是一个实向量空间, 则实线性空间 $W \times W$ (同构于 $W \dot{+} W$) 上的变换

$$J:\ (x,\ y) \to (-y,\ x)$$

是一个复结构.

证 事实上，有

$$\begin{aligned} J((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= (-y_1-y_2,\ x_1+x_2) \\ &= J(x_1,\ y_1)+J(x_2,\ y_2), \end{aligned}$$

及

$$J(\lambda(x,\ y)) = (-\lambda y,\ \lambda x) = \lambda J(x,\ y).$$

故 J 是 $W\times W$ 上的线性变换. 又

$$J^2(x,\ y) = J(-y,\ x) = -(x,\ y).$$

故

$$J^2 = -I,$$

因而 J 是 $W\times W$ 上的复结构. □

由此而得到的相应的复空间 $\overline{W\times W}$ 叫做 W 的 **复化**, 记为 W^C.

W^C 中子集 $\{(x,\ 0)|x\in W\}$ 显然构成一个实向量空间，而且与 W 同构. $(x,\ 0)\to x$ 为同构对应. 今后记 $(x,\ 0)=x$, $\{(x,\ 0)|x\in W\}=W$. 因而我们将 W 嵌入到 W^C 中了.

命题 6 符号如上所述，则有

(1) $\forall z\in W^C$, 都可唯一地表示为 $z=x+iy$, $x,\ y\in W$.

(2) $\forall \lambda+i\mu\in \mathbf{C}$, $x+iy\in W^C$, 有

$$(\lambda+i\mu)(x+iy) = (\lambda x-\mu y)+i(\lambda y+\mu x). \tag{1.1.5}$$

(3) 若 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 是 W 的基, 则亦为 W^C 的基. 故

$$\dim W^C = \dim W. \tag{1.1.6}$$

证 (1) $z \in W^C$, 即 $z = (x, y)$, $x, y \in W$. 故有

$$z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + J(y, 0) = x + iy.$$

而且由 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, 有 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, 知表达式唯一.

(2) $\forall \lambda + i\mu \in \mathbf{C}$, $x + iy \in W^C$, 有

$$\begin{aligned}(\lambda + i\mu)(x + iy) &= (\lambda + i\mu)(x, y) \\ &= (\lambda x, \lambda y) + (-\mu y, \mu x) \\ &= (\lambda x - \mu y) + i(\lambda y + \mu x).\end{aligned}$$

(3) $\forall x, y \in W$ 有 $x = \sum_s \lambda^s x_s$, $y = \sum_s \mu^s x_s$, 且表示式是唯一的. 故

$$\begin{aligned}x + iy &= \sum_s \lambda^s x_s + i \sum_s \mu^s x_s \\ &= \sum_s (\lambda^s + i\mu^s) x_s,\end{aligned}$$

且表示式亦唯一. 故 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 W^C 的基. 因而 (1.1.6) 成立. □

所谓将一个实向量空间 W 复化, 实际就是将 W 的基域由 $\mathbf{R}$ 扩充为 $\mathbf{C}$. 由上述命题知:

$$W^C = W + JW = W + \sqrt{-1}W.$$

反之, 任一复向量空间 E, 必为某子集所构成的实线性空间 W 的复化.

事实上, 设 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 为 E 的一组基, 令

$$W = \left\{ \sum_s \lambda^s z_s \mid \lambda^s \in \mathbf{R} \right\},$$

则 W 是 $\mathbf{R}$ 上的向量空间, 其复化 $W^C (= \overline{W \times W})$ 就是 E.

1.1.3 实李代数的容许复结构

定义 3 $\mathfrak{g}$ 是实李代数，$\mathfrak{g}$ 的线性变换 J 叫做**容许复结构**，如果 J 满足

(1) J 是实向量空间 $\mathfrak{g}$ 的容许复结构；

(2) $J[x,\ y] = [Jx,\ y].$ $\quad$ (1.1.7)

显然，由 (2) 知 $J[x,\ y] = [x,\ Jy]$.

此时 $\overline{\mathfrak{g}}$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的李代数.

事实上，只要验证 $[\alpha x,\ \beta y] = \alpha\beta[x,\ y], \forall\alpha,\ \beta \in \mathbf{C}$. 设 $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \beta = \beta_1 + i\beta_2$. 于是

$$
\begin{aligned}
& [(\alpha_1 + i\alpha_2)x,\ (\beta_1 + i\beta_2)y] \\
= & [\alpha_1 x + \alpha_2 Jx,\ \beta_1 y + \beta_2 Jy] \\
= & \alpha_1\beta_1[x,y] + \alpha_2\beta_1[Jx,y] \\
& + \alpha_1\beta_2[x,Jy] + \alpha_2\beta_2[Jx,Jy] \\
= & (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)[x,y] + (\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)J[x,y] \\
= & [(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)][x,y] \\
= & (\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2)[x,y].
\end{aligned}
$$

复数域 $\mathbf{C}$ 上的李代数 E, 亦可看成实数域 $\mathbf{R}$ 上的李代数，记为 E^R. $J : x \to ix$ 是容许复结构，称为**正则复结构**. 此时 $\overline{E^R} = E$.

1.1.4 实李代数的复化 复李代数的实形

设 $\mathfrak{g}_0$ 是实李代数. 在实向量空间 $\mathfrak{g}_0$ 的复化

$$\mathfrak{g}_0^C = \{x + iy | x,\ y \in \mathfrak{g}_0\}$$

中定义

$$[x_1+iy_1,\ x_2+iy_2]=[x_1,\ x_2]-[y_1,\ y_2]+i([y_1,\ x_2]+[x_1,\ y_2]). \tag{1.1.8}$$

易知 $\mathfrak{g}_0^C$ 是一个复李代数，而且它在 $\mathfrak{g}_0$ 上与原来的李代数结构一致，称为 $\mathfrak{g}_0$ 的 **复化**.

反之，若 $\mathfrak{g}$ 是复李代数，亦可看成实李代数，以 $\mathfrak{g}^R$ 表示之. 如果存在 $\mathfrak{g}^R$ 的子代数 $\mathfrak{g}_0$ 使得

$$\mathfrak{g}_0^C=\mathfrak{g}, \tag{1.1.9}$$

则称 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 **实形式**.

显然 $\mathfrak{g}^R$ 有正则复结构 $J(x)=ix$. 有时为区分 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^R$ 起见，令 J 表示复结构. $\forall z\in\mathfrak{g}$, $z=x+iy$, $x,\ y\in\mathfrak{g}_0$, $z\in\mathfrak{g}^R$, $z=x+Jy$. 故

$$\mathfrak{g}^R=\mathfrak{g}_0\dot{+}J\mathfrak{g}_0. \tag{1.1.10}$$

1.1.5 实形式与共轭

定义 4 设 $\mathfrak{g}_0$ 是复李代数 $\mathfrak{g}$ 的实形式. 故 $\mathfrak{g}=\{x+iy|x,y\in\mathfrak{g}_0\}$, $\mathfrak{g}$ 中映射 $\sigma: x+iy\to x-iy$ 叫做由 $\mathfrak{g}_0$ 决定的 **共轭**.

引理 1 设 σ 是由复李代数 $\mathfrak{g}$ 的实形 $\mathfrak{g}_0$ 决定的共轭，则

(1) $\sigma^2(x)=x;$ (1.1.11)

(2) $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y);$ (1.1.12)

(3) $\sigma(\alpha x)=\bar{\alpha}\sigma(x);$ (1.1.13)

(4) $\sigma([x,\ y])=[\sigma(x),\ \sigma(y)],$ (1.1.14)

$\forall x,\ y\in\mathfrak{g}$, $\alpha\in\mathbf{C}$. $\bar{\alpha}$ 是 α 的共轭复数.

证 设 $x=x_1+ix_2$, $y=y_1+iy_2$, $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$, 其中 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathfrak{g}_0$, $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbf{R}$.

(1) $\sigma^2(x)=\sigma(x_1-ix_2)=x_1+ix_2=x;$

(2) $\sigma(x+y)=x_1+y_1-i(x_2+y_2)=\sigma(x)+\sigma(y);$

(3) $\sigma(\alpha x)=(\alpha_1x_1-\alpha_2x_2)-i(\alpha_2x_1+\alpha_1x_2)=\bar{\alpha}\sigma(x);$

(4) $\sigma([x,\ y])=[x_1,\ y_1]-[x_2,\ y_2]-i[x_1,\ y_2]-i[x_2,\ y_1]$
$=[\sigma(x),\ \sigma(y)].$ □

系 $\mathfrak{g}_0=\{x\in\mathfrak{g}|\sigma(x)=x\}$, $J\mathfrak{g}_0=\{x\in\mathfrak{g}|\sigma(x)=-x\}$.

由此可知 σ 不是 $\mathfrak{g}$ 的自同构，而是 $\mathfrak{g}^R$ 的自同构.

复李代数 $\mathfrak{g}$ 中一个到自身的映射，若满足条件 (1)—(4), 则称为 $\mathfrak{g}$ 的一个 **半对合**.

引理 2 若复李代数 $\mathfrak{g}$ 有一个半对合 σ, 则

$$\mathfrak{g}_0=\{x|\sigma x=x\}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的一个实形式，而且由 $\mathfrak{g}_0$ 决定的共轭就是 σ.

证 由于对任何 $x,\ y\in\mathfrak{g}_0$, $\lambda,\ \mu\in\mathbf{R}$, 有 $\sigma(\lambda x+\mu y)=\lambda x+\mu y\in\mathfrak{g}_0$ 及 $\sigma([x,\ y])=[\sigma(x),\ \sigma(y)]=[x,\ y]\in\mathfrak{g}_0$, 因此 $\mathfrak{g}_0$ 是一个实李代数.

其次，证明 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+i\mathfrak{g}_0$, 且 $\mathfrak{g}_0\cap i\mathfrak{g}_0=\{0\}$. 事实上，$\forall z\in\mathfrak{g}$, 有 $\sigma(\sigma(z)+z)=\sigma(z)+z$, $\sigma(-i(z-\sigma(z)))=-i(z-\sigma(z))$. 故 $\frac{1}{2}(z+\sigma(z))$, $\frac{-i}{2}(z-\sigma(z))\in\mathfrak{g}_0$. 而 $z=\frac{1}{2}(z+\sigma(z))+i(\frac{-i}{2}(z-\sigma(z))$, 即 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+i\mathfrak{g}_0$. 又 $x\in\mathfrak{g}_0\cap i\mathfrak{g}_0$, 则由 $x\in i\mathfrak{g}_0$, 有 $x_0\in\mathfrak{g}_0$ 使 $x=ix_0$. $x\in\mathfrak{g}_0$, 则 $\sigma(x)=x$. $x_0\in\mathfrak{g}_0$, 则 $\sigma(x)=\sigma(ix_0)=-ix_0=-x$. 故 $x=0$.

由此知 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实形式，显然 $\mathfrak{g}_0$ 决定的共轭恰为 σ. □

1.1.6 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^R$ 与 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 型

设 $\mathfrak{g}$ 是实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复化，$\mathfrak{g}$ 可作为实李代数记为 $\mathfrak{g}^R$. 故 $\overline{\mathfrak{g}^R}=\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^R$ 的 Killing 型分别记为 $(x,\ y)_0$, $(x,\ y)$, $(x,\ y)_R$.

引理 3 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}$ 及 $\mathfrak{g}^R$ 的 Killing 型有下列关系:

$$(x,\ y)_0 = (x,\ y), \quad \forall x,\ y \in \mathfrak{g}_0, \tag{1.1.15}$$

$$(x,\ y)_R = 2Re(x,\ y), \quad \forall x,\ y \in \mathfrak{g}^R. \tag{1.1.16}$$

证 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的一组基. 故亦为 $\mathfrak{g}$ 的基, 而 $x_1, x_2, \ldots, x_n, Jx_1, Jx_2, \ldots, Jx_n$ 为 $\mathfrak{g}^R$ 的一组基, 其中 J 为正则复结构.

若 $x, y \in \mathfrak{g}_0$, 则 $\mathrm{ad}\,x\mathrm{ad}\,y(x_k) \in \mathfrak{g}_0$. 因而 $\mathrm{ad}\,x\mathrm{ad}\,y$ 作为 $\mathfrak{g}_0$ 的变换与作为 $\mathfrak{g}$ 的变换, 对基 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 有相同的矩阵. 故有 (1.1.15) 成立.

又 $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}^R$, 有

$$(J\mathrm{ad}\,x)y = J[x,\ y] = [x,\ Jy] = (\mathrm{ad}\,x \cdot J)y. \tag{1.1.17}$$

故 $\mathrm{ad}\,x$ 亦是 $\mathfrak{g}$ 的线性映射, 显然与 x 作为 $\mathfrak{g}$ 的元素的伴随表示的像一样. 设 $\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y$ 作为 $\mathfrak{g}$ 的变换对基 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的矩阵为 $B + iC$, B, C 为实矩阵. 则 $\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y$ 作为 $\mathfrak{g}^R$ 的变换对基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

由此立即得 (1.1.16). □

定理 4 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^R$ 同时半单或同时非半单.

证 只要说明 $(x,\ y)_0$, $(x,\ y)$, $(x,\ y)_R$ 中之一非退化, 则它们同时是非退化的.

(1) 若 $(x,\ y)_0$ 非退化, 而 $x + iy \in \mathfrak{g}$ 使得

$$(x + iy,\ \mathfrak{g}) = 0,$$

则有 $(x, \mathfrak{g}_0)+i(y, \mathfrak{g}_0)=0$. 又 $x, y\in\mathfrak{g}_0$, $(x, \mathfrak{g}_0)=(x, \mathfrak{g}_0)_0\in\mathbf{R}$, $(y, \mathfrak{g}_0)=(y, \mathfrak{g}_0)_0\in\mathbf{R}$. 故 $(x, \mathfrak{g}_0)_0=(y, \mathfrak{g}_0)_0=0$. 于是 $x+iy=0$. 即 (x, y) 非退化.

(2) 若 (x, y) 非退化，不难证明

$$\operatorname{ad} Jx \operatorname{ad} y = J\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y,$$

又 J 对基 $x_1, x_2, \ldots, x_n, Jx_1, Jx_2, \ldots, Jx_n$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

故对 $x, y\in\mathfrak{g}^R$, $\operatorname{ad} Jx \operatorname{ad} y$ 对此基的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -C & -B \\ B & -C \end{pmatrix}.$$

因而 $(Jx, y)_R=2\mathrm{Re}(ix, y)=-2\mathrm{Im}(x, y)$. 若 $(y, x)_R=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}^R$, 则 $(y, x)_R=2\mathrm{Re}(x, y)=0$ 故 $\mathrm{Re}(x, y)=0$. 又 $\mathrm{Im}(x, y)=-\frac{1}{2}(y, Jx)_R=0$, 故 $(x, y)=\mathrm{Re}(x, y)+i\mathrm{Im}(x, y)=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}^R$, 从而 $(y, \mathfrak{g}^R)=0$, 即 $(y, \mathfrak{g})=0$, 故 $y=0$. 因而 $(y, x)_R$ 非退化.

(3) 设 $(x, y)_R$ 非退化. 若 $(x, \mathfrak{g}_0)_0=0$, 则有

$$(x, \mathfrak{g}_0)=(x, \mathfrak{g}_0)_0=0.$$

因而 $(x, \mathfrak{g})=0$, 即 $(x, y)=0$, $\forall y\in\mathfrak{g}$. 故 $(x, y)_R=2\mathrm{Re}(x, y)=0$, $\forall y\in\mathfrak{g}^R$. 故 $x=0$. 所以 $(x, y)_0$ 非退化.

因而 $(x, y)_0$, (x, y), $(x, y)_R$ 之一非退化，则它们同时非退化. □

作为练习，读者不妨证明下述两个性质;

1. 若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^C$, $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数 (理想), 则 $\mathfrak{h}_0^C$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数 (理想). 而且在理想的时候有

$$[\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}_0]^C \cong \mathfrak{g}_0^C/\mathfrak{h}_0^C.$$

2. 若 τ_0 为 $\mathfrak{g}_0$ 的根基 (即极大可解理想), 则 τ_0^C 为 $\mathfrak{g}_0^C$ 的根基.

1.2 李代数的自同构与自同构群

李代数的自同构及自同构群的理论与李群、线性群的理论密切相关, 为此本节前一半简要地叙述一下有关的事实. 这些事实今后还要不断地用到.

1.2.1 李群与李代数的关系

李群与李代数的关系非常密切. 我们主要用到下面一些.

1. 设 $\mathfrak{G}$ 是一个李群, $\mathfrak{g}$ 为其李代数. 指数映射 exp: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{G}$ 在 o 是解析的和可逆的.

$\forall X\in\mathfrak{g}$, $t\in\mathbf{R}$, $\exp tX$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个单参数子群.

2. 若 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个解析子群, 则 $\mathfrak{H}$ 的李代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 且 $\{\exp X|X\in\mathfrak{h}\}$ 生成的子群是 $\mathfrak{H}$ 的单位连通分支.

3. 反之, 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数, 则 $\{\exp X|X\in\mathfrak{h}\}$ 生成的子群 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个连通解析子群, 其李代数就是 $\mathfrak{h}$.

4. 若 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的闭子群, 则 $\mathfrak{H}$ 可定义流形结构使得 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个李子群.

1.2.2 线性群的一些结果

线性群即线性变换构成的群不仅在李群与李代数理论中非常重要, 在代数群与代数李代数的理论中也是很重要的. 下面

一些结果是很基本的.

1. $GL(n, \mathbf{F})$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的 n 阶一般线性群，其李代数为 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$. 由 $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$ 到 $GL(n, \mathbf{F})$ 的指数映射是

$$\exp X = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots = e^X, \ \forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{F}),$$

且 $\exp\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$ 必包含 $GL(n, \mathbf{F})$ 的一个单位邻域.

设 $\mathfrak{G}$ 是 $GL(n, \mathbf{F})$ 的子群，其李代数为 $\mathfrak{g}$. 则 $\exp\mathfrak{g}$ 包含 $\mathfrak{G}$ 的一个单位邻域. 若 $\mathfrak{G}$ 连通，则 $\mathfrak{G}$ 由 $\exp \mathfrak{g} = \{\exp X | X \in \mathfrak{g}\}$ 生成. $\mathfrak{G}$ 非连通，则 $\exp\mathfrak{g}$ 生成 $\mathfrak{G}$ 的单位连通分支.

2. $GL(n, \mathbf{R})$ 的一个子群 $\mathfrak{G}$ 称为**代数群**, 如果有 n^2 元多项式族 $\{P_\alpha\}$, 使得 $\sigma = (x_{ij}) \in \mathfrak{G}$ 之充要条件为

$$P_\alpha(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}) = 0.$$

$GL(n,\mathbf{C})$ 的一个子群 $\mathfrak{G}$ 称为**伪代数群**, 如果有 $2n^2$ 元多项式族 $\{P_\beta\}$, 使得 $\sigma = (x_{ij} + \sqrt{-1}y_{ij}) \in \mathfrak{G}$ 之充要条件是

$$P_\beta(\ldots\ x_{ij}\ \ldots\ y_{ij}\ \ldots) = 0.$$

显然 $GL(n,\mathbf{C})$ (或 $GL(n, \mathbf{R})$) 的伪代数群或代数群均为它们的闭子群，故为其李子群，因而是李群.

3. 设 $\mathfrak{G}$ 是线性群， $\mathfrak{g}$ 为其李代数. $\forall\sigma \in \mathfrak{G}$, 可定义 $\mathfrak{G}$ 到自身的一个映射 θ_σ 如下：

$$\theta_\sigma\xi = \sigma\xi\sigma^{-1}.$$

显然 θ_σ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个自同构，叫**内自同构**. θ_σ 诱导了 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构 $\dot{\theta}_\sigma$ (或 $d\theta_\sigma$), 满足：

$$\theta_\sigma \exp Y = \exp \dot{\theta}_\sigma Y, \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

引理 1 $\dot{\theta}_\sigma$ 有下述性质:

(1) $\dot{\theta}_\sigma Y = \sigma Y \sigma^{-1}$, $\forall \sigma \in \mathfrak{G}$, $Y \in \mathfrak{g}$.

(2) 若 $\sigma = \exp X$ $(X \in \mathfrak{g})$, 则 $\dot{\theta}_\sigma = \exp \operatorname{ad} X$.

证 (1) 取 $\xi = \exp Y$, 则有

$$\begin{aligned}\exp \dot{\theta}_\sigma Y &= \sigma(\exp Y)\sigma^{-1} \\ &= \sigma(I + Y + \frac{1}{2!}Y^2 + \cdots)\sigma^{-1} \\ &= \exp \sigma Y \sigma^{-1}.\end{aligned}$$

于是 (1) 成立.

(2) 用归纳法可以证明

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}C_k^r X^r Y X^{k-r} = (\operatorname{ad}X)^k Y,$$

其中 $C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}$.

设 $\sigma = \exp X$, 于是

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_\sigma Y &= \sigma Y \sigma^{-1} = (\exp X)Y(\exp(-X)) \\ &= (I + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots)Y(I - X + \frac{X^2}{2!} - \cdots) \\ &= \sum_{m,n}\frac{(-1)^n}{m!n!}X^m Y X^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}C_k^r X^r Y X^{k-r}) \\ &= \sum \frac{1}{k!}(\operatorname{ad}X)^k Y \\ &= e^{\operatorname{ad}X}Y.\end{aligned}$$

故 (2) 成立. □

此引理对一般李群亦成立.

1.2.3 李代数的自同构与自同构群

定义 1 李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个线性变换 α 称为一个 **导子**, 若满足

$$\alpha[x, y] = [\alpha x, y] + [x, \alpha y], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

特别, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}\, x$ 显然是一个导子, 称为 **内导子**.

以 $\partial[\mathfrak{g}]$ 表示全体导子的集合, 自然 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 是全体内导子的集合. 对 $\alpha, \beta \in \partial[\mathfrak{g}]$, 定义

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha,$$

则 $\partial[\mathfrak{g}]$ 是一个李代数. 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **导子代数**.

由于对任何 $\alpha \in \partial[\mathfrak{g}]$, $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 有

$$[\alpha, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}\, \alpha x.$$

因而 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 是 $\partial[\mathfrak{g}]$ 的一个理想.

定义 2 李代数 $\mathfrak{g}$ 的非异线性变换 θ 称为 $\mathfrak{g}$ 的一个 **自同构**, 如果 $\forall x, y \in \mathfrak{G}$, 均有

$$\theta[x, y] = [\theta x, \theta y].$$

所有的自同构构成一群, 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **自同构群**, 记为 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$.

若 $\mathfrak{g}$ 是 r 维实李代数, $\theta \in \mathrm{Aut}\ \mathfrak{g} \subset GL(r, \mathbf{R})$. 又 θ 亦可看成 $\mathfrak{g}^C$ 的自同构. 故 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g} \subset GL(r, \mathbf{C})$.

引理 2 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 是 $GL(r, \mathbf{R})$ 的代数群, 亦是 $GL(r, \mathbf{C})$ 的伪代数群. 故 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 是一个李群.

证 设 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 且

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}^k x_k, \quad 1 \le i, j \le r.$$

故 $\theta \in GL(r,\mathbf{C})$, $\theta x_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_{j\,i} x_j$, $1 \le i \le r$. $\theta \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 之充要条件是

$$\theta[x_i,\ x_j] = [\theta x_i,\ \theta x_j],$$

即

$$\sum_{s,t} \alpha_{t\,i}\alpha_{s\,j} C_{s\,t}^{h} = \sum_{k} C_{i\,j}^{k} \alpha_{hk},\ \text{且}\ \bar{\alpha}_{j\,i} = \alpha_{j\,i}.$$

故 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 是 $GL(r,\mathbf{R})$ 的代数群， $GL(r,\mathbf{C})$ 的伪代数群. 因而是一个李群. □

引理 3 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的李代数 $\mathrm{aut}\,\mathfrak{g} = \partial[\mathfrak{g}]$.

证 首先证 $\mathrm{aut}\,\mathfrak{g} \subseteq \partial[\mathfrak{g}]$. $\forall \alpha \in \mathrm{aut}\,\mathfrak{g}$, $t \in \mathbf{R}$, 则 $\exp t\alpha \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$. 因而有

$$[\exp t\alpha(x),\ \exp t\alpha(y)] = \exp t\alpha([x,\ y]),\ \forall x,\ y \in \mathfrak{g}.$$

故

$$[x,\ y] + t([\alpha(x),\ y] + [x,\ \alpha(y)]) + t^2 z = [x,\ y] + t\alpha[x,\ y] + t^2 z,$$

故

$$[\alpha x,\ y] + [x,\ \alpha y] = \alpha[x,\ y],$$

即 $\alpha \in \partial[\mathfrak{g}]$.

其次，证明 $\partial[\mathfrak{g}] \subseteq \mathrm{aut}\mathfrak{g}$. 容易证明，若 $\alpha \in \partial[\mathfrak{g}]$, x, $y \in \mathfrak{g}$, 则

$$\alpha^k[x,\ y] = \sum_{i=0}^{k} C_k^i [\alpha^{k-i}x,\ \alpha^i y].$$

现对 $\forall \alpha \in \partial[\mathfrak{g}]$, x, $y \in \mathfrak{g}$ 有

$$[(\exp\alpha)x,\ (\exp\alpha)y] = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} x,\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} y\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m+n=k} \frac{k!}{m!n!} [\alpha^{k-n} x,\ \alpha^n y] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} [x,\ y] \\
&= (\exp \alpha)[x,\ y],
\end{aligned}
$$

故 $\exp \alpha \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$. 即 $\alpha \in \operatorname{aut} \mathfrak{g}$. 因而引理成立. □

定义 3 $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ 中以 $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ 为李代数的连通子群称为 $\mathfrak{g}$ 的**内自同构群**. 记为 $\operatorname{Ad} \mathfrak{g}$ (或 $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$).

由引理 1 知 $\operatorname{Ad} \mathfrak{g}$ 由 $\{\dot{\theta}_\sigma | \sigma \in \mathfrak{G}\}$ 所生成.

引理 4 如果 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数, 则 $\partial[\mathfrak{g}] = \operatorname{ad} \mathfrak{g}$.

证 若不然, 则有 $D \in \partial[\mathfrak{g}]$, 但 $D \notin \operatorname{ad} \mathfrak{g}$. 令

$$
\mathfrak{g}_1 = \operatorname{ad} \mathfrak{g} + L(D)
$$

其中 $L(D)$ 是 D 生成的线性空间. 由 $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的理想, 知 $\mathfrak{g}_1$ 是非半单李代数. $\mathfrak{g}$ 半单, 故 $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ 亦半单. 设 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的根基(即极大可解理想), 则

$$
\mathfrak{g}_1 = \operatorname{ad} \mathfrak{g} \dot{+} \mathfrak{r}.
$$

显然 $\dim \mathfrak{r} = 1$. 故 $\mathfrak{r} = \mathfrak{L}(\mathfrak{T})$ (即由 T 生成的一维空间). $\forall x \in \mathfrak{g}$, 有

$$
\operatorname{ad} T x = [T,\ \operatorname{ad} x] \in \operatorname{ad} \mathfrak{g} \cap \mathfrak{r} = \{0\},
$$

故 $\operatorname{ad} T x = 0$. 由于 $\mathfrak{g}$ 半单, 中心为 0, 故 $Tx = 0$, 即 $T = 0$. 此矛盾证明了本引理. □

系 1 若 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数, 则 $\operatorname{Ad} \mathfrak{g}$ 是 $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ 的单位连通分支.

证 $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ 的单位连通分支由 $\exp \partial[\mathfrak{g}]$ 生成, 即由 $\exp \operatorname{ad} \mathfrak{g}$ 生成, 即 $\operatorname{Ad} \mathfrak{g}$. □

系 2 $\mathfrak{g}$ 半单, 则 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的正规子群, 且 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 是离散群.

下面我们假定 $\mathfrak{g}_0$ 是实半单李代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^C$, 相应有 $\mathfrak{g}^R$. 于是 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^R$ 均是半单的. 设 J 是相应的正则复结构. $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^R$ 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}^R$ 的单位连通分支. 由于

$$J\mathrm{ad}\,x = \mathrm{ad}\,xJ = \mathrm{ad}\,Jx, \quad \forall x \in \mathfrak{g}^R,$$

故 $\mathrm{ad}\,x$ 为 $\mathfrak{g}$ 的线性变换. $\exp\mathrm{ad}\,x$ 亦为 $\mathfrak{g}$ 的自同构, 仍称为内自同构, 全体内自同构生成的群记为 $\mathrm{Ad}\mathfrak{g}$ $(=\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^R)$.

定理 1 设 $\mathfrak{g}_0$ 是复李代数 $\mathfrak{g}$ 的实形式, G_0 是 $\mathrm{Ad}\mathfrak{g}^R$ 中以 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0$ 为李代数的连通子群. 则有

(1) G_0 是闭子群;

(2) G_0 与 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ 同构.

证 (1) 由 G_0 之定义知 G_0 是由 $\exp\lambda\mathrm{ad}\,x$ $(\lambda\in\mathbf{R}, x\in\mathfrak{g}_0)$ 所生成. 设 σ 是 $\mathfrak{g}_0$ 所决定的共轭. 因而 $x\in\mathfrak{g}_0 \iff \sigma x = x$. 而由于

$$\mathrm{ad}\,\sigma x\cdot y = [\sigma x,\ y] = [\sigma x,\ \sigma^2 y] = \sigma[x,\ \sigma y],$$

又 σ 是 $\mathfrak{g}^R$ 的自同构, $\sigma^2 = I$, 故 $\sigma=\sigma^{-1}$. 因而

$$\mathrm{ad}\,\sigma x = \sigma\mathrm{ad}\,x\sigma^{-1}.$$

又由 $\mathfrak{g}^R$ 半单知 $\mathrm{ad}\,x = \mathrm{ad}\,y \iff x = y$. 由此知 $x\in\mathfrak{g}_0 \iff \mathrm{ad}\,x = \sigma\mathrm{ad}\,x\sigma^{-1}$. 又

$$\exp\sigma\lambda\mathrm{ad}\,x\sigma^{-1} = \sigma\cdot\exp\lambda\mathrm{ad}\,x\cdot\sigma^{-1},$$

故

$$x\in\mathfrak{g}_0 \iff \exp\lambda\mathrm{ad}\,x = \sigma\cdot\exp\lambda\mathrm{ad}\,x\cdot\sigma^{-1}.$$

于是

$$t \in G_0 \iff t = \sigma t \sigma^{-1},$$

即

$$G_0 = \{t | \sigma t \sigma^{-1} = t\}.$$

故 G_0 是闭子群.

(2) 由 $J\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, xJ$, 故 $J \exp \lambda \mathrm{ad}\, x = \exp \lambda \mathrm{ad}\, x \cdot J$.

又 $t \in G_0$, 从 $\mathrm{ad}\, x(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{g}_0, \forall x \in \mathfrak{g}_0$ 知 $t(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$. 故 $\mathfrak{g}_0$ 是 t 的不变子空间. 令 $t' = t|_{\mathfrak{g}_0}$. 又从 $J \exp \lambda \mathrm{ad} x = \exp \lambda \mathrm{ad}\, x \cdot J$ 知有 $Jt = tJ$. $x \in \mathfrak{g}^R$, $x = x_1 + Jx_2$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}_0$. 故有

$$tx = tx_1 + tJx_2 = tx_1 + J(tx_2) = t'x_1 + J(t'x_2),$$

故 $t' = \mathrm{id} \iff t = \mathrm{id}$. 故 $\phi : t \to t'$ 是 G_0 到 $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}_0$ 上的群同构, 且在单位点解析. 由

$$t \xrightarrow{L_{t^{-1}}} e \xrightarrow{\phi} e_0 \xrightarrow{L_{t'}} t'$$

$L_{t^{-1}}, \phi, L_{t'}$ 解析, ϕ 在 t 处解析. 故 G_0 与 $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}_0$ 同构. □

由此定理我们可把 $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}_0$ 嵌入 $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}$ $(= \mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}^R)$ 中, 即把 $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}_0$ 看成 $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}^R$ 的闭子群.

1.3 紧致李代数与紧致嵌入子代数

1.3.1 H. Weyl 定理及紧致李代数

H. Weyl 定理 设 $\mathfrak{G}$ 是作用于实 (复) 线性空间 V 上的紧致线性群, 则必有 V 上的正定二次 (Hermite) 形在 $\mathfrak{G}$ 下不变.

证 因 $\mathfrak{G}$ 紧致，故为幺模群，因而有不变测度 $\mathrm{d}g$. 设 Q 是 V 上任意一个二次 (Hermite) 形. 令

$$H(x,\ y)=\int_{\mathfrak{G}}Q(gx,\ gy)\mathrm{d}g,$$

则

$$\begin{aligned}H(g_1x,\ g_1y)&=\int_{\mathfrak{G}}Q(gg_1x,\ gg_1y)\mathrm{d}g\\&=\int_{\mathfrak{G}}Q(gx,\ gy)\mathrm{d}g\\&=H(x,\ y).\end{aligned}$$

即 $H(x,\ y)$ 在 $\mathfrak{G}$ 下不变.

又由 $Q(x,\ y)$ 正定. 若 $x\neq 0$, 则 $Q(gx,\ gx)>0$, 故 $H(x,\ x)>0$. 即 H 是正定二次 (Hermite) 形. □

定义 1 若实李代数 $\mathfrak{g}$ 的内自同构群 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 紧致, 则称 $\mathfrak{g}$ 是紧致的.

系 实紧致李群 $\mathfrak{G}$ 的李代数 $\mathfrak{g}$ 是紧致李代数.

因为 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的伴随表示的同态像, 故紧致. □

引理 1 设 $\mathfrak{g}$ 是紧致李代数, 则有 $\mathfrak{g}$ 上正定二次形 $H(x,\ y)$ 满足:

$$H(\mathrm{ad}\,x(y),\ z)+H(y,\ \mathrm{ad}\,x(z))=0,\ \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.\qquad(1.3.1)$$

证 因 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 紧致, 故由 H. Weyl 定理知有 $\mathfrak{g}$ 上正定二次形 $H(x,\ y)$ 使得对任何 $x,\ y,\ z\in\mathfrak{g},\ t\in\mathbf{R}$ 有

$$H(e^{t\mathrm{ad}\,x}y,\ e^{t\mathrm{ad}\,x}z)=H(y,\ z).$$

而

$$e^{t\mathrm{ad}\,x}=I+t\mathrm{ad}\,x+\frac{t^2}{2}(\mathrm{ad}\,x)^2+\cdots.$$

故有

$$H(y,\ z)+t(H(\operatorname{ad}x(y),\ z)+H(y,\ \operatorname{ad}x(z)))+O(t^2)$$
$$=H(y,\ z).$$

故 (1.3.1) 成立. □

我们也称具有此性质的正定二次形 $H(x,\ y)$ 在 $\mathfrak{g}$ 下 **不变**.

系 紧致李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型半负定.

证 设 $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ 是对于 $\mathfrak{g}$ 的不变正定二次形 H 的标准正交基. 设 $\operatorname{ad}x$ 关于基 $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ 的矩阵为 (x_{ij}), 则由

$$H(\operatorname{ad}x(e_i),\ e_j)+H(e_i,\ \operatorname{ad}x(e_j))=0$$

得 $x_{ij}=-x_{ji}$ 及

$$(x,\ x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ik}x_{ki}=-\sum_{i}\sum_{k}x_{ik}^2\leq 0. \qquad \square$$

引理 2 若 $\mathfrak{g}_0$ 是紧致李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 则有 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{g}_1$, 使得

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\dot{+}\mathfrak{g}_1. \tag{1.3.2}$$

证 设 $H(x,\ y)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的正定二次形. 令

$$\mathfrak{g}_1=\{x|H(x,\ \mathfrak{g}_0)=0\},$$

则有 $\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_0=\{0\}$. 且对 $\forall y\in\mathfrak{g},\ x\in\mathfrak{g}_1,\ z\in\mathfrak{g}_0$ 有

$$H(\operatorname{ad}y(x),\ z)=-H(x,\ \operatorname{ad}y(z))=0.$$

故 $\operatorname{ad}y(x)\in\mathfrak{g}_1$. 故 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 于是 (1.3.2) 成立. □

系 紧致李代数 $\mathfrak{g}$ 可分解为极小理想的直和:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\dot{+}\mathfrak{g}_2\dot{+}\cdots\dot{+}\mathfrak{g}_k,$$

而且 $H(\mathfrak{g}_i,\ \mathfrak{g}_j)=0$, $[\mathfrak{g}_i,\ \mathfrak{g}_j]=0$, $\forall i\neq j$. □

定理 1 设 $\mathfrak{g}$ 是紧致李代数, 则 $\mathfrak{g}=\mathfrak{c}\dot{+}\mathfrak{g}_1$. 其中 $\mathfrak{c}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心, $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的唯一的极大半单理想.

证 由引理 2 知有

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{c}\dot{+}\mathfrak{g}_1,\quad H(\mathfrak{c},\ \mathfrak{g}_1)=0.$$

若 $\mathfrak{g}_1$ 非半单, 则有可换理想 $\mathfrak{g}_0$. 故 $\mathfrak{g}=\mathfrak{c}\dot{+}\mathfrak{g}_0\dot{+}\mathfrak{g}_2$, $H(\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}_2)=0$, 故 $[\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}_2]\subseteq\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}_2=0$, 故 $[\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}]=0$, $\mathfrak{g}_0\subseteq\mathfrak{c}$. 这就产生矛盾. 故 $\mathfrak{g}_1$ 半单.

又设 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 中任一半单理想. 故 $\mathfrak{g}_0=[\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}_0]$, 因而

$$\mathfrak{g}_0\subset[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]=[\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_1]=\mathfrak{g}_1,$$

故 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的唯一极大半单理想. □

定理 2 实李代数 $\mathfrak{g}$ 紧致半单的充要条件是其 Killing 型负定.

证 由 $\mathfrak{g}$ 紧致半单, 得 $(x,\ y)$ 非退化, 且 $(x,\ x)\leq 0$, $\forall x\in\mathfrak{g}$. 故 $(x,\ x)<0$, 即 $\mathfrak{g}$ 之 Killing 型负定.

反之, 若 $\mathfrak{g}$ 之 Killing 型负定, 故非退化, 因而 $\mathfrak{g}$ 半单. 又 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的单位连通分支, 故为闭子群.

又 $\forall A\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, $x,y\in\mathfrak{g}$, 有 $\mathrm{ad}\,Ax=A\,\mathrm{ad}\,xA^{-1}$, $\mathrm{ad}\,Ay=A\,\mathrm{ad}\,yA^{-1}$. 于是 $(Ax,\ Ay)=(x,\ y)$. 故 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 令 $(x,\ y)$ 不变. 由 $(x,\ y)$ 负定知 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 是 $O(n)$ $(n=\dim\mathfrak{g})$ 中闭子群. 故 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 亦为 $O(n)$ 的闭子群, 故紧致. 因而 $\mathfrak{g}$ 是紧致半单李代数. □

系 1 对于实李代数 $\mathfrak{g}$, 下面三个条件是等价的:

(1) $\mathfrak{g}$ 是某个紧致李群 $\mathfrak{G}$ 的李代数;

(2) $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 紧致;

(3) 存在 $\mathfrak{g}$ 的不变正定二次型 $H(x, y)$.

证 由紧致李代数定义之系知从 (1) 可得 (2). 从引理 1 可知由 (2) 可得 (3). 现假定 (3) 成立, 则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \dot{+} \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{c}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心, $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的唯一的极大半单理想 (由引理 2 即可得到), 而且 $\mathfrak{g}_1$ 的 Killing 型负定. 故 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_1$ 紧致, 其李代数为 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_1$,. 又 $\dim \mathfrak{c}$ 维环面 $T^{\dim \mathfrak{c}}$ 紧致且其代数为 $\mathfrak{c}$. 故 $\mathfrak{g}$ 是紧致李群

$$T^{\dim \mathfrak{c}} \times \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_1$$

的李代数. 因而 (1) 成立. □

系 2 若 $\mathfrak{g}$ 是紧致半单李代数, 则 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 是有限群.

事实上, 从定理 2 的证明知 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 均为 $O(N)$ 的闭子群, 故紧致. 又 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的单位连通分支. 故 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 紧致, 离散, 故有限. □

1.3.2 紧致嵌入子代数

定义 2 设 $\mathfrak{g}$ 是实李代数, $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 是 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 中以 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 为李代数的解析子群. 若 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 紧致, 则称 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 **紧致嵌入子代数**.

显然, 若 $\mathfrak{g}$ 紧致, 则 $\mathfrak{g}$ 是它自身的紧致嵌入子代数.

命题 1 (1) $\mathfrak{g}$ 的紧致嵌入子代数 $\mathfrak{k}$ 是紧致李代数.

(2) $\mathfrak{g}$ 的紧致半单子代数 $\mathfrak{k}$ 必是 $\mathfrak{g}$ 的紧致嵌入子代数.

证 (1) 因为 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 的子群 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 令 $\mathfrak{k}$ 不变. 故 $\forall A \in \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 有 $A|_{\mathfrak{k}} \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{k}$. 故有 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 到 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{k}$ 的同态对应. 由 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 紧致, 故得 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{k}$ 紧致, 因而 $\mathfrak{k}$ 紧致.

(2) $\mathfrak{k}$ 紧致半单, 故 $\mathfrak{k} \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$, 且 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{k}$ 紧致. 又 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k} \to \mathrm{Ad}\,\mathfrak{k}$ 是覆盖映射. H. Weyl 证明了紧致连通李群的通用覆盖群及同态象均是紧致的. 故 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 紧致, 即 $\mathfrak{k}$ 为紧致嵌入子代数. □

1.3.3 复半单李代数的紧致实形式

并非任何复李代数都有实形式, 但可肯定复半单李代数有紧致实形式.

定理 3 任一复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 恒存在一个紧致实形.

证 设 $\mathfrak{g}$ 为复半单李代数, $\mathfrak{h}$ 为其 Cartan 子代数. 于是

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

Δ 为根系.

对每个 $\alpha \in \Delta$, 可由 Killing 型 (,) 确定唯一的 H_α 使得 $(H,\ H_\alpha) = \alpha(H)$. 对 $\alpha,\ \beta \in \Delta$, $\alpha(H_\beta)$ 是实数.

对每个 $\alpha \in \Delta$, 可选取 $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ 使得

$$\begin{aligned}
&[X_\alpha,\ X_{-\alpha}] = H_\alpha;\\
&[H,\ X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha, \quad H \in \mathfrak{h};\\
&[X_\alpha,\ X_\beta] = N_{\alpha\beta}X_{\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

这儿 $N_{\alpha\beta}$ 满足

$$\begin{aligned}
&N_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{当}\,\alpha+\beta \notin \Delta,\\
&N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha-\beta},\\
&N_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2}q(1+p)\alpha(H_\alpha),
\end{aligned}$$

其中 $p,\ q$ 是整数, 且 $\beta + n\alpha\ (p \le n \le q)$ 是通过 β 的 $\alpha-$ 根链.

由 $\{H_\alpha\}$ 生成的实线性空间 $\sum \mathbf{R}H_\alpha$ 是 $\mathfrak{h}$ 的实形式，叫做 $\mathfrak{h}$ 的 **幂等**，记为 $\mathfrak{h}_R$. 令

$$\mathfrak{g}_k = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbf{R}(iH_\alpha) + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbf{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbf{R}(i(X_\alpha + X_{-\alpha})).$$

则 $\mathfrak{g}_k$ 是 $\mathbf{R}$ 上的李代数. 这是因为

$$[iH_\beta,\ X_\alpha - X_{-\alpha}] = \alpha(H_\beta)i(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in \mathfrak{g}_k,$$
$$[iH_\beta,\ i(X_\alpha + X_{-\alpha})] = -\alpha(H_\beta)(X_\alpha - X_{-\alpha}) \in \mathfrak{g}_k,$$

以及

$$\begin{aligned}
&[X_\alpha - X_{-\alpha},\ X_\beta - X_{-\beta}]\\
&= N_{\alpha\beta}(X_{\alpha+\beta} - X_{-\alpha-\beta}) - N_{\alpha\,-\beta}(X_{\alpha-\beta} - X_{\beta-\alpha}) \in \mathfrak{g}_k,\\
&[i(X_\alpha + X_{-\alpha}),\ i(X_\beta + X_{-\beta})]\\
&= -N_{\alpha\beta}(X_{\alpha+\beta} - X_{-\alpha-\beta}) - N_{\alpha\,-\beta}(X_{\alpha-\beta} - X_{\beta-\alpha}) \in \mathfrak{g}_k,\\
&[X_\alpha - X_{-\alpha},\ i(X_\beta + X_{-\beta})]\\
&= iN_{\alpha\beta}(X_{\alpha+\beta} + X_{-\alpha-\beta}) + iN_{\alpha\,-\beta}(X_{\alpha-\beta} + X_{\beta-\alpha}) \in \mathfrak{g}_k.
\end{aligned}$$

显然 $\mathfrak{g}^R = \mathfrak{g}_k + i\mathfrak{g}_k$，又 $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}_k = \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{g}$，故 $\mathfrak{g}_k$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实形式.

又 $\mathfrak{g}_k$ 的 Killing 型是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{g}_k$ 上的限制.

注意到当 $\alpha+\beta\neq 0$ 时， $(X_\alpha,\ X_\beta) = 0$. 又由

$$\begin{aligned}
\alpha(H) &= (H_\alpha,\ H)\\
&= ([X_\alpha,\ X_{-\alpha}],\ H) = (X_{-\alpha},\ [H,\ X_\alpha])\\
&= \alpha(H)(X_{-\alpha},\ X_\alpha),
\end{aligned}$$

可得 $(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$. 所以

$$(X_\alpha - X_{-\alpha},\ X_\alpha - X_{-\alpha}) = -2,$$

$$
\begin{aligned}
&(i(X_\alpha + X_{-\alpha}),\ i(X_\alpha + X_{-\alpha})) = -2,\\
&(iH_\alpha,\ iH_\alpha) = -\alpha(H_\alpha) < 0.\\
&(X_\alpha - X_{-\alpha},\ i(X_\alpha + X_{-\alpha})) = 0.
\end{aligned}
$$

由此可知 $\mathfrak{g}_k$ 的 Killing 型负定，故 $\mathfrak{g}_k$ 紧致半单，为 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式. □

1.4 Cartan 分解

1.4.1 E. Cartan 的一个定理

下面的 Cartan 定理是很重要的. 为证明这个定理，先证几个引理.

引理 1 设 τ 是复李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个半对合，$\mathfrak{u}$ 为对应的实形式，$(x,\ y)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 则

(1) $(\tau x,\ \tau y) = \overline{(x,\ y)}$;

(2) $H(x,\ y) = -(x,\ \tau y)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上 Hermite 型，而且 $\mathfrak{u}$ 紧致半单之充要条件是 H 正定.

证 (1) 以 $(\ ,\ )_\mathfrak{u}$ 表示 $\mathfrak{u}$ 的 Killing 型，则 $(w,\ v) = (w,\ v)_\mathfrak{u} \in \mathbf{R}, \forall w,\ v \in \mathfrak{u}$.

$\forall x = x_1 + ix_2,\ y = y_1 + iy_2 \in \mathfrak{g},\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathfrak{u}$ 有

$$
(\tau x,\ \tau y) = (x_1,\ y_1) - (x_2,\ y_2) - i((x_1,\ y_2) + (x_2,\ y_1)),
$$

$$
(x,\ y) = (x_1,\ y_1) - (x_2,\ y_2) + i((x_1,\ y_2) + (x_2,\ y_1)).
$$

又 $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2), (x_1,\ y_2), (x_2,\ y_1)$ 均为实数，故 (1) 成立.

(2) 因为 $H(y,\ x) = -(\tau x,\ \tau^2 y) = -\overline{(x,\ \tau y)} = \overline{H(x,\ y)}$. 故 $H(x,\ y)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上 Hermite 型.

又 $\mathfrak{u}$ 紧致半单当且仅当 $(x,\ x) < 0,\ \forall 0 \neq x \in \mathfrak{u}$. 设 $x = x_1 + ix_2,\ x_1,\ x_2 \in \mathfrak{u}$. 于是

$$H(x,\ x) = -(x_1 + ix_2,\ x_1 - ix_2) = -(x_1, x_1) - (x_2, x_2).$$

故 $(\ ,\ )_{\mathfrak{u}}$ 负定之充要条件是 H 正定, 故 $\mathfrak{u}$ 紧半单的充分必要条件是 H 正定. □

引理 2 若 σ, τ 均为复李代数 $\mathfrak{g}$ 的半对合, 则 $N = \sigma\tau$ 为 $\mathfrak{g}$ 的自同构. 且 $N^{-1} = \tau\sigma$.

证 由 $\tau,\ \sigma$ 可逆, 故 N 可逆, 且 $N^{-1} = \tau\sigma$. 又

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \sigma(\tau x + \tau y) = Nx + Ny, \\ N(\alpha x) &= \sigma(\bar{\alpha}\tau(x)) = \alpha N(x), \\ N([x, y]) &= \sigma([\tau x,\ \tau y]) = [Nx,\ Ny]. \end{aligned}$$

故 N 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构. □

引理 3 $\mathfrak{u}$ 是复李代数 $\mathfrak{g}$ 的实形式, 对应的共轭为 τ. 又 ϕ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构, 则 $\phi\mathfrak{u}$ 亦为 $\mathfrak{g}$ 的实形式, 对应共轭为 $\phi\tau\phi^{-1}$. 且 $\mathfrak{u}$ 紧致时 $\phi\mathfrak{u}$ 亦紧致.

证 先证 $\phi\tau\phi^{-1}$ 是一个半对合. 事实上

$$\begin{aligned} &\phi\tau\phi^{-1} \cdot \phi\tau\phi^{-1} = I; \\ &\phi\tau\phi^{-1}(\alpha x) = \bar{\alpha}\phi\tau\phi^{-1}(x); \\ &\phi\tau\phi^{-1}(x+y) = \phi\tau\phi^{-1}(x) + \phi\tau\phi^{-1}(y); \\ &\phi\tau\phi^{-1}[x,\ y] = [\phi\tau\phi^{-1}(x),\ \phi\tau\phi^{-1}(y)]. \end{aligned}$$

又 $\tau x = x$ 当且仅当 $\phi\tau x = \phi x$, 当且仅当 $\phi\tau\phi^{-1}(\phi x) = \phi(x)$. 故 $\phi\mathfrak{u} = \{\phi x | \tau x = x\} = \{y | \phi\tau\phi^{-1}(y) = y\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实形式, 对应的共轭为 $\phi\tau\phi^{-1}$.

又若 $Q(x,\ y)$ 是 $\mathfrak{u}$ 上的不变二次形，则 $Q_\phi(\phi x,\ \phi y) = Q(x,\ y)$ 必是 $\phi\mathfrak{u}$ 上的不变二次形. 故 $\mathfrak{u}$ 紧致时，$\phi\mathfrak{u}$ 亦紧致.
□

引理 4 若 σ, τ 均为复李代数 $\mathfrak{g}$ 的半对合，对应实形式为 $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, 则 $\sigma\tau = \tau\sigma$ 当且仅当 $\sigma\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$, 当且仅当 $\tau\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$.

证 设 $\sigma\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$, $\forall x,\ y \in \mathfrak{v}$ 有 $\sigma x,\ \sigma y \in \sigma\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$. 因而 $\tau(\sigma x) = \sigma x$, $\tau(\sigma y) = \sigma y$. 故

$$\begin{aligned}\sigma\tau(x+iy) &= \sigma x + i\sigma y \\ &= \tau\sigma x + i\tau\sigma y \\ &= \tau\sigma(x+iy),\end{aligned}$$

即 $\sigma\tau = \tau\sigma$. 同理由 $\tau\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ 亦可得 $\sigma\tau = \tau\sigma$.

反之，若 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 则对 $x \in \mathfrak{v}$ 有

$$\tau(\sigma x) = (\tau\sigma)x = (\sigma\tau)x = \sigma(\tau x) = \sigma x,$$

故 $\sigma x \in \mathfrak{v}$. 又 $x = \sigma^2 x = \sigma(\sigma x) \in \sigma\mathfrak{v}$, 因而 $\sigma\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$. 同理 $\tau\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$. □

定理 1 设 $\mathfrak{g}_0$ 是实半单李代数；$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$; $\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个紧致实形式；σ, τ 分别为 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{u}$ 所决定的共轭. 则存在 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构 ϕ, 使得 $\phi\mathfrak{u}$ 在 σ 下不变.

证 因 $\mathfrak{u}$ 紧致半单，故 $\mathfrak{g}$ 上 Hermite 形

$$H(x,\ y) = -(x,\ \tau y)$$

是正定的. 又 $N = \sigma\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$. $N^{-1}\tau = \tau N$. 又

$$H(Nx,\ y) = -(x,\ N^{-1}\tau y) = H(x,\ Ny).$$

因而 N 是 $\mathfrak{g}$ 上一个 Hermite 对称变换. 因而可选取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 使得在此基下有

$$N = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n), \quad \mu_i \neq 0, \ \mu_i \in \mathbf{R}.$$

在此基下, $N^2 = P$ 之矩阵为

$$P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \quad \lambda_i = \mu_i^2 > 0.$$

令

$$P^t = \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \cdots, \lambda_n^t),$$

则有 $P^tN = NP^t$, 而且 $P^t \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

事实上, 若 $[x_j, x_k] = \sum C_{jk}^l x_l$, 从 $P \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, 得

$$[Px_j, Px_k] = P[x_j, x_k],$$

有

$$\lambda_j\lambda_k C_{jk}^l = \lambda_l C_{jk}^l.$$

若 $C_{jk}^l \neq 0$, 则 $\lambda_j\lambda_k = \lambda_l$. 故 $\lambda_j^t\lambda_k^t = \lambda_l^t$. 若 $C_{jk}^l = 0$, 则上式对任何数均成立, 故有

$$\lambda_j^t\lambda_k^t C_{jk}^l = \lambda_l^t C_{jk}^l,$$

即 $[P^tx_j, P^tx_k] = P^t[x_j, x_k]$. 故 $P^t \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

故 $P^t\mathfrak{u}$ 亦为 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形, 对应的共轭为 $\tau_1 = P^t\tau P^{-t}$. 又

$$\tau P\tau^{-1} = \tau N^2\tau^{-1} = \tau\sigma\tau\sigma = P^{-1}.$$

令 $A = \operatorname{diag}(\ln\lambda_1, \ln\lambda_2, \cdots, \ln\lambda_n)$, 则 $P^t = e^{tA}$. 由上式有 $\tau A\tau^{-1} = -A$, 故 $\tau(tA)\tau^{-1} = -tA$. 从而 $\tau P^t\tau^{-1} = P^{-t}$. 由此得

$$\sigma\tau_1 = \sigma P^t\tau P^{-t} = \sigma\tau\tau^{-1}P^t\tau P^{-t} = NP^{-2t},$$

$$\tau_1\sigma = (\sigma\tau_1)^{-1} = (NP^{-2t})^{-1} = N^{-1}P^{2t}.$$

$P^t\mathfrak{u}$ 在 σ 下不变当且仅当 $\sigma\tau_1 = \tau_1\sigma$, 即 $NP^{-2t} = N^{-1}P^{2t}$, 即 $N^2 = P^{4t}$. 故可取 $t = 1/4$, $\phi = P^{1/4}$ 即为所求. □

1.4.2 Cartan 分解及其性质

设 $\mathfrak{g}_0$ 是实半单李代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$. σ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭. $\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式, 满足 $\sigma\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$. τ 是 $\mathfrak{u}$ 的共轭. 因而 $\sigma\tau = \tau\sigma$. $\tau\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0$. 于是 $\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$. 由 $\tau^2 = I$. 有

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{01} + \mathfrak{g}_{0-1},\\
&\mathfrak{g}_{0\pm1} = \{x | x \in \mathfrak{g}_0, \tau(x) = \pm x\}.
\end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}^R = \mathfrak{u} + J\mathfrak{u},\\
&\mathfrak{u} = \{x|\tau(x) = x\}, \quad J\mathfrak{u} = \{x|\tau(x) = -x\},
\end{aligned}$$

故

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u} + \mathfrak{g}_0 \cap J\mathfrak{u}.$$

在 $\mathfrak{g}$ 中上式可写成

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u} + \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}.$$

同理

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u} + \mathfrak{u} \cap i\mathfrak{g}_0.$$

令 $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}$. 于是 $\mathfrak{k}_0$ 是子代数, 且

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0, \tag{1.4.1}$$

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0. \tag{1.4.2}$$

定义 1 $\mathfrak{g}_0$ 是实半单李代数. $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^C$. 若 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个向量空间的分解, 而且满足

(1) $\mathfrak{k}_0$ 是一个子代数;

(2) $\mathfrak{k}_0+i\mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个紧致实形式.

则称此分解为 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 **Cartan 分解.**

从前面的讨论知任何实半单李代数均存在 Cartan 分解. 下面讨论 Cartan 分解的一些性质.

命题 1 如果 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 分解, 则有下列结果:

(1) $\exists s\in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$, 使得 $sx=x, \forall x\in\mathfrak{k}_0$; $sy=-y, \forall y\in\mathfrak{p}_0$.

(2) $[\mathfrak{k}_0,\ \mathfrak{k}_0]\subseteq\mathfrak{k}_0$. $[\mathfrak{p}_0,\ \mathfrak{p}_0]\subseteq\mathfrak{k}_0$, $[\mathfrak{k}_0,\ \mathfrak{p}_0]\subseteq\mathfrak{p}_0$.

(3) $\forall x\in\mathfrak{k}_0, y\in\mathfrak{p}_0$, 有

$$\begin{cases}(x,\ x)<0, & x\neq 0;\\ (y,\ y)>0, & y\neq 0;\\ (x,\ y)=0.\end{cases}\tag{1.4.3}$$

其中 (,) 是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^C$ 的 Killing 型.

(4) $\mathfrak{k}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个最大紧致嵌入子代数.

证 (1) 因 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ 是 Cartan 分解. 故 $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}_0+i\mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式. 设对应的共轭为 τ. 则对 $x\in\mathfrak{k}_0$ 有 $\tau x=x$. 对 $y\in\mathfrak{p}_0$, 即 $iy\in i\mathfrak{p}_0$ 有 $\tau(y)=\tau(-i\cdot iy)=-y$. 即 $\tau\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_0$. 因而 $s=\tau|_{\mathfrak{g}_0}\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$. 且 $s(x)=x, x\in\mathfrak{k}_0$; $s(y)=-y, y\in\mathfrak{p}_0$.

(2) $\mathfrak{k}_0$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数, 故 $[\mathfrak{k}_0,\ \mathfrak{k}_0]\subseteq\mathfrak{k}_0$. 又 $\forall x\in\mathfrak{k}_0$, $y,z\in\mathfrak{p}_0$. 有

$$s[x,\ y]=[sx,\ sy]=[x,\ -y]=-[x,\ y],\quad 即\ [x,\ y]\in\mathfrak{p}_0,$$
$$s[y,\ z]=[sy,\ sz]=[-y,\ -z]=[y,\ z],\quad 即\ [x,\ y]\in\mathfrak{k}_0,$$

即 $[\mathfrak{k}_0,\ \mathfrak{p}_0]\subseteq\mathfrak{p}_0$, $[\mathfrak{p}_0,\ \mathfrak{p}_0]\subseteq\mathfrak{k}_0$.

(3) 设 $x+iy\in\mathfrak{u}$, $x\in\mathfrak{k}_0$, $y\in\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式. 故

$$(x+iy,\ x+iy)_{\mathfrak{u}}=(x+iy,\ x+iy)<0.$$

而 $(x,\ x)=(x,\ x)_{\mathfrak{g}_0}$, $(y,\ y)=(y,\ y)_{\mathfrak{g}_0}$, $(x,\ y)=(x,\ y)_{\mathfrak{g}_0}$ 均为实数，又

$$(x+iy,\ x+iy)=(x,\ x)-(y,\ y)+2i(x,\ y),$$

因而 (3) 成立.

(4) 因为 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ 与 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 均为 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^R$ 的闭子群，又 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 紧致. 故 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0\cap\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 亦紧致，且李代数为 $\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{u}=\mathfrak{k}_0$. 故 $\mathfrak{k}_0$ 在 $\mathfrak{g}_0$ 中是紧致嵌入的.

由于 $H(x,y)=-(x,\tau y)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上正定 Hermite 型，而且有

$$\begin{aligned}H(\mathrm{ad}\,x(y),\ z)&=(y,\ [x,\ \tau z])=(y,\ \tau[\tau x,\ z])\\&=-H(y,\ \mathrm{ad}\tau x(z)).\end{aligned}$$

若 $x\in\mathfrak{k}_0$, 则 $\tau x=x$, 对于 H, $\mathrm{ad}\,x$ 是反称 Hermite 变换，故 $\mathrm{ad}\,x$ 的特征值为纯虚数.

若 $x\in\mathfrak{p}_0$, 则 $\tau x=-x$. 对于 H, $\mathrm{ad}x$ 是对称 Hermite 变换. 故 $\mathrm{ad}\,x$ 的特征值是实数.

若 $\mathfrak{k}_0$ 非极大，则有紧致嵌入子代数 $\mathfrak{k}_1\supset\mathfrak{k}_0$. 故有 $0\neq x_1\in\mathfrak{k}_1\cap\mathfrak{p}_0$, 而 $\mathrm{ad}\,x_1$ 是对称 Hermite 变换，特征值为实数. $e^{t\,\mathrm{ad}\,x_1}$ 是无界集，不属于任何紧致子群，矛盾. 故 $\mathfrak{k}_0$ 极大. □

命题 2 若 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ 是向量空间的分解，而且

(1) 有 $s\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$ 使得 $sx=x$, $x\in\mathfrak{k}_0$. $sx=-x$, $x\in\mathfrak{p}_0$.

(2) $(x,\ x)<0$, $\forall 0\neq x\in\mathfrak{k}_0$, $(y,\ y)>0$, $\forall 0\neq y\in\mathfrak{p}_0$.

则此分解为 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 分解.

证 由 (1), 得 $(x, y) = (sx, sy) = -(x, y)$, 即 $(x, y) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{k}_0, y \in \mathfrak{p}_0$. 而且 $s[x_1, x_2] = [sx_1, sx_2] = [x_1, x_2]$, $\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{k}_0$. 故 $[\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_0] \subseteq \mathfrak{k}_0$, 即 $\mathfrak{k}_0$ 是子代数.

令 $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$, 则有

$$[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] = [\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_0] + [\mathfrak{k}_0, i\mathfrak{p}_0] + [\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] \subseteq \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{u}.$$

故 $\mathfrak{u}$ 也是 $\mathfrak{g}^R$ 的子代数.

又 $\forall 0 \neq x + iy \in \mathfrak{u}$, 有

$$\begin{aligned}(x+iy, x+iy)_{\mathfrak{u}} &= (x, x)_{\mathfrak{g}_0} - (y, y)_{\mathfrak{g}_0} + 2i(x, y)_{\mathfrak{g}_0} \\ &= (x, x)_{\mathfrak{g}_0} - (y, y)_{\mathfrak{g}_0} < 0.\end{aligned}$$

故 $\mathfrak{u}$ 紧致半单. 由 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + i\mathfrak{g}_0$, 故必有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$, 即 $\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式.

故 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是 Cartan 分解. □

系 若 $\mathfrak{u}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式, 则 $\mathfrak{g}^R = \mathfrak{u} + J\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{g}^R$ 的一个 Cartan 分解.

证 设 σ 是由 $\mathfrak{u}$ 决定的共轭, 则 $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}^R$, 且

$$\sigma(x + Jy) = x - Jy, \quad \forall x, y \in \mathfrak{u}.$$

又

$$\begin{aligned}&(x, x)_{\mathfrak{g}^R} = 2\operatorname{Re}(x, x) = 2\operatorname{Re}(x, x)_{\mathfrak{u}} = 2(x, x)_{\mathfrak{u}} < 0, \\ &(Jx, Jx)_{\mathfrak{g}^R} = 2\operatorname{Re}(Jx, Jx) = -2\operatorname{Re}(x, x) > 0.\end{aligned}$$

由命题 2 知 $\mathfrak{g}^R = \mathfrak{u} + J\mathfrak{u}$ 是 Cartan 分解. □

1.5 实半单李代数的自同构

1.5.1 预备知识

设 V 是酉空间, $H(x, y)$ 为其 Hermite 内积. a 是 V 上的线性变换. 由

$$H(ax, y) = H(x, a^*y)$$

所定义的线性变换 a^* 称为 a 的 **共轭变换**.

若 $a^{-1} = a^*$, 即 $H(ax, y) = H(x, a^{-1}y)$, 则称 a 为 **酉变换**. 若 $a^* = a$, 即 $H(ax, y) = H(x, ay)$, 则称 a 为 **Hermite (对称)** 的. 若 $a^* = -a$, 即 $H(ax, y) = -H(x, ay)$, 则称 a 为 **Hermite 反称** 的. 若 $a^*a = aa^*$, 则称 a 为 **正规** 的.

显然, 上面所述前三类变换都是正规变换.

所有酉变换构成一群, 称为 **酉群**, 记为 $U(V)$.

命题 1 (1) 若 a 是正规变换, 又 V_1 是 a 的不变子空间, 则 $V_1^\perp$ 亦为 a 的不变子空间. 而且, 可找到 V 的一组标准正交基使得 a 的矩阵为对角矩阵. 即

$$a = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为 a 的特征值.

(2) 若 a 是酉变换, λ 为其特征值, 则 $\lambda\bar{\lambda} = 1$.

若 a 是 Hermite 变换, λ 为其特征值, 则 λ 是实数.

若 a 是 Hermite 反称变换, 则其特征值 λ 为纯虚数.

证 (1) 设 $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ 分别为 $V_1, V_1^\perp$ 的标准正交基. 则 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 为 V 的标准正交基, 且 a, a^* 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \overline{A_1'} & \overline{A_2'} \\ 0 & \overline{A_3'} \end{pmatrix}.$$

我们只要证明 $A_2=0$ 就可以了. 由于 $a^*a=aa^*$, 于是有

$$\begin{pmatrix} A_1\overline{A_1'} & A_1\overline{A_2'} \\ A_2\overline{A_1'} & A_2\overline{A_2'}+A_3\overline{A_3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A_1'}A_1+\overline{A_2'}A_2 & \overline{A_2'}A_3 \\ \overline{A_3'}A_2 & \overline{A_3'}A_3 \end{pmatrix}.$$

因而, $\operatorname{tr}(\overline{A_2'}A_2)=0$. 进而, $A_2=0$.

(2) 将 a 对角化后, 可得 $a^*=\operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n)$.

a 为酉变换, $a^{-1}=\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$, 故 $\bar{\lambda}_i=\lambda_i^{-1}$, $\lambda_i\bar{\lambda}_i=1$.

a 为 Hermite 变换, 则 $\lambda_i=\bar{\lambda}_i$, 故 λ_i 为实数.

a 为 Hermite 反称变换, 则 $\bar{\lambda}_i=-\lambda_i$, λ_i 为纯虚数. □

引理 1 设 $\mathfrak{H}$ 是 V 上所有 Hermite 对称变换集合, $\mathfrak{H}'$ 是 V 上所有正定 Hermite 变换集合. 则映射 $\exp: W\to e^W$ 是 $\mathfrak{H}$ 到 $\mathfrak{H}'$ 上的一一映射.

证 对任一 $W\in\mathfrak{H}$, 有

$$(e^W)^*=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(W^n)^*=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(W^*)^n=e^{W^*}=e^W.$$

且若 μ 是 W 的特征根, 则 e^μ 是 e^W 的特征根. 又 μ 是实数, 故 $e^\mu>0$. 因而 $e^W\in\mathfrak{H}'$.

又若 $h\in\mathfrak{H}'$, 可选取标准正交基 $\{v_i\}$ 使得 h 的矩阵为

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

定义 W, 使得 W 在 $\{v_i\}$ 下的矩阵为

$$\operatorname{diag}(\ln\lambda_1, \ln\lambda_2, \ldots, \ln\lambda_n),$$

显然 $W\in\mathfrak{H}$, 且 $e^W=h$.

又若有 $W' \in \mathfrak{H}$, 亦使 $e^{W'} = h$. 设 v 是 W' 的对应特征值 μ 的特征向量. 且 $v = \sum a_i v_i$. 故有

$$hv = e^{W'} v = e^{\mu} v.$$

另一方面，有

$$hv = \sum a_i h v_i = \sum a_i \lambda_i v_i,$$

于是有，若 $\lambda_i \neq e^{\mu}$, 则 $a_i = 0$. 即 $v = \sum_{\lambda_i = e^{\mu}} a_i v_i$. 故

$$Wv = \sum_{\lambda_i = e^{\mu}} a_i W v_i = \sum a_i \ln \lambda_i v_i = \sum a_i \mu v_i = \mu v.$$

故 $W = W'$.

因而 exp 是 $\mathfrak{H}$ 到 $\mathfrak{H}'$ 上的一一映射. □

命题 2 若 $a \in GL(V)$, 则 a 可唯一的分解为

$$a = k \cdot h, \quad k \in U(V),\ h \in \mathfrak{H}'. \tag{1.5.1}$$

证 $a \in GL(V)$, 则 $a^* a \in \mathfrak{H}'$. 事实上

$$H(a^* a x,\ y) = H(ax,\ ay) = H(x,\ a^* a y),$$

即 $a^* a \in \mathfrak{H}$.

又设 λ 为 $a^* a$ 的特征值，对应特征向量为 x. 故

$$\lambda = \frac{H(a^* a x,\ x)}{H(x,\ x)} = \frac{H(ax,\ ax)}{H(x,\ x)} > 0.$$

所以 $a^* a \in \mathfrak{H}'$. 故有 $W \in \mathfrak{H}$ 使得 $a^* a = e^W$. 故 $h = e^{\frac{1}{2}W} \in \mathfrak{H}'$. 令 $k = ah^{-1}$. 于是

$$k^* = h^{-1} a^* a a^{-1} = h a^{-1} = k^{-1},$$

即 $k \in U(V)$.

若 $k_1 h_1 = kh$, 故 $k^{-1}k_1 = hh^{-1} \in U(V)$. 因而有

$$h_1^{-1}h = (hh_1^{-1})^* = (hh_1^{-1})^{-1} = h_1 h^{-1},$$

故 $h^2 = h_1^2$, $e^W = e^{W_1}$, $W = W_1$. 故 $h_1 = h$, 即 $k_1 = k$. □

注 由 $\exp : \mathfrak{gl}(V) \to GL(V)$ 连续，得 exp 是 $\mathfrak{H}$ 到 $\mathfrak{H}'$ 上的同胚映射.

引理 2 从紧致空间 R 到 Hausdorff 空间 R' 上的一一连续映射 f 是相互连续的，即为同胚.

证 设 F' 为 R' 中闭集, 则 $F = f^{-1}(F')$ 为 R 中的闭集. 反之，若 F 是 R 中的闭集，则 $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ 是 R' 中紧致子集，又 R' 为 Hausdorff 空间，故 $(f^{-1})^{-1}(F)$ 是 R' 中闭集. 故 f^{-1} 连续，因而 f 是同胚映射. □

系 $GL(n, \mathbf{C})$ 是 $\mathfrak{U}(n)$ 与 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的拓扑积.

证 对任一 $a \in GL(n, \mathbf{C})$ 有分解 $a = kh$, $k \in \mathfrak{U}(n)$, $h \in \mathfrak{H}'$. 令

$$\phi: (k, h) \to a = kh.$$

由分解的唯一性知 ϕ 是一一的，而且是连续的. 令

$$\phi_k: h \to a = kh.$$

这是 $\mathfrak{U}(n)$ 到 $GL(n, \mathbf{C})$ 的一一对应. 由 ϕ_k 的连续性和 $\mathfrak{U}(n)$ 的紧致性知 $\phi_k^{-1}(a) = h$ 是连续的，即 h 是 a 的连续函数. 由此得 $k = ah^{-1}$ 亦为 a 的连续函数. 即 ϕ^{-1} 连续.

故 $GL(n, \mathbf{C})$ 与 $\mathfrak{U}(n) \times \mathfrak{H}'$ 同胚.

$\mathfrak{H}'$ 与 $\mathfrak{H}$ 同胚, 因而与 $\mathbf{R}^{n^2}$ 同胚. 故 $GL(n, \mathbf{C})$ 与 $\mathfrak{U}(n) \times \mathbf{R}^{n^2}$ 同胚. □

注 不用引理 2, 也可证明此系. 事实上, 由命题 1 的证明, 知 $h=e^{\frac{W}{2}}$, 而 $h^2=e^W=a^*a$, 故 h 是 a 的连续函数, 因而 $k=ah^{-1}$ 亦为 a 的连续函数. □

命题 3 令 $\mathfrak{G}$ 是 V 上伪代数群. $\mathrm{Lie}\,\mathfrak{G}=\mathfrak{g}$. 若 $\sigma\in\mathfrak{G}$, 则有 $\sigma^*\in\mathfrak{G}$, 则对 $\forall\sigma\in\mathfrak{G}$, $\sigma=kh$ 一定有 k, $h\in\mathfrak{G}$, $h=e^W$, $W\in\mathfrak{g}$.

证 因 $\sigma\in\mathfrak{G}$, 故 $\sigma^*\in\mathfrak{G}$. 故 $\sigma^*\sigma\in\mathfrak{G}$. 而 $\sigma^*\sigma=e^{W_1}$, $W_1\in\mathfrak{H}$. 在 V 上取一组基使得 $W_1=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n)$, $\lambda_i\in\mathbf{R}$.

$\mathfrak{G}$ 是伪代数群, 设在此基下, $\sigma=(x'_{ij}(\sigma)+\sqrt{-1}x''_{ij}(\sigma))\in\mathfrak{G}$ 之充要条件是 x'_{ij}, x''_{ij} 满足下述代数方程组:

$$F(\cdots\ x'_{ij}\ \ldots\ x''_{ij}\ \cdots)=0.$$

在 F 中令 $x'_{ii}=x_i$, $x'_{ij}=x''_{ij}=0\ (i\neq j)$, $x''_{ii}=0$ 得一新代数方程组

$$F'(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0.$$

由 $e^{W_1}\in\mathfrak{G}$, 有

$$F'(e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots,e^{\lambda_n})=0.$$

又对任何整数 m, 有 $(e^{W_1})^m=e^{mW_1}\in\mathfrak{G}$. 故有

$$F'(e^{m\lambda_1},\ e^{m\lambda_2},\ \ldots,\ e^{m\lambda_n})=0,\ m\in\mathbf{Z}.$$

对某个 $t\in\mathbf{R}$, 若有

$$\begin{aligned}&F'(e^{t\lambda_1},\ e^{t\lambda_2},\ \ldots,\ e^{t\lambda_n})\\&=\sum_m b_m e^{tA_m}\neq 0\quad (A_1>A_2>\cdots,b_m\neq 0),\end{aligned}$$

可取 $p \in \mathbf{Z}$ 使得

$$|\sum_{m=2} b_m e^{pA_m}| < |b_1 e^{pA_1}|.$$

但 $F'(e^{p\lambda_1}, e^{p\lambda_2}, \ldots, e^{p\lambda_n}) = 0$, 矛盾. 故

$$F'(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \ldots, e^{t\lambda_n}) = 0.$$

于是 $e^{tW_1} \in \mathfrak{G}$, $W_1 \in \mathfrak{g}$, $h = e^W \doteq e^{\frac{W_1}{2}} \in \tilde{\mathfrak{G}}$, $k \in \mathfrak{G}$, $W \in \mathfrak{g}$. □

1.5.2 实半单李代数的自同构

设 $\mathfrak{g}_0$ 是实半单李代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 分解, $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形, σ, τ 分别为对应 $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{u}$ 的共轭, 则 $\sigma\tau = \tau\sigma$, $\tau\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0$, $\sigma\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$, 且

$$H(x, y) = -(x, \tau y)$$

是 $\mathfrak{g}$ 上正定 Hermite 型. $\mathfrak{g}$ 关于 $H(x, y)$ 成为一个内积空间. $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$ 的每个元素 ρ 可自然地扩充为 $\mathfrak{g}$ 的自同构, 仍以 ρ 表示之. 由此可知 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的伪代数群.

引理 3 若 $\rho \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$, 则

$$\rho^* = \tau\rho^{-1}\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0. \tag{1.5.2}$$

证 因 $H(\rho x, y) = H(x, \rho^* y)$, 故

$$-(\rho x, \tau y) = -(x, \tau\rho^* y),$$

即 $(x, \rho^{-1}\tau y) = (x, \tau\rho^* y)$. 所以

$$\rho^{-1}\tau = \tau\rho^*,$$

即 (1.5.2) 成立. □

引理 4 令 K 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$ 中令 $\mathfrak{k}_0$ 不变的子群，即

$$K = \{k | k \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0, k\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0\}.$$

则有以下性质：

(1) $k \in K$ 当且仅当 $k\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0$;

(2) $k \in K$ 当且仅当 $\tau k = k\tau$;

(3) $k \in K$ 当且仅当 $k \in U(n) \cap \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$.

证 (1) $\forall x \in \mathfrak{p}_0, y \in \mathfrak{k}_0$, 有

$$H(y,\ x) = -(y,\ \tau x) = (y,\ x) = 0.$$

反之，设 $x \in \mathfrak{g}_0$ 满足 $H(y,\ x) = 0, \forall y \in \mathfrak{k}_0$. 于是 $x = x_1 + x_2, x_1 \in \mathfrak{k}_0, x_2 \in \mathfrak{p}_0$. 若 $x_1 \neq 0$, 则 $H(x_1,\ x) = H(x_1,\ x_1) + H(x_1,\ x_2) = H(x_1,\ x_1) > 0$, 矛盾. 故 $x_1 = 0$, 即 $x \in \mathfrak{p}_0$, 故 $\mathfrak{p}_0 = \{x \in \mathfrak{g}_0 | H(\mathfrak{k}_0,\ x) = 0\}$.

同样 $\mathfrak{k}_0 = \{x \in \mathfrak{g}_0 | H(x,\ \mathfrak{p}_0) = 0\}$.

由 $\tau\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0, k\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0$, 故 $k^{-1}\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0$ 故 $\tau k^{-1}\tau\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0$. 而

$$\begin{aligned} &H(\mathfrak{k}_0,\ k\mathfrak{p}_0) = H(k^*\mathfrak{k}_0,\ \mathfrak{p}_0) \\ =\ &H(\tau k^{-1}\tau\mathfrak{k}_0,\ \mathfrak{p}_0) = H(\mathfrak{k}_0,\ \mathfrak{p}_0) \\ =\ &0. \end{aligned}$$

故 $k\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0$.

反之，若 $k\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0$, 又 $\tau\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0$, 故 $\tau k^{-1}\tau\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0$, 而

$$H(k\mathfrak{p}_0,\ \mathfrak{p}_0) = H(\mathfrak{k}_0,\ k^*\mathfrak{p}_0) = H(\mathfrak{k}_0,\ \tau k^{-1}\tau\mathfrak{p}_0) = 0.$$

故 $k\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0$, 即 $k \in K$.

(2) $\forall x \in \mathfrak{g}_0$ 有 $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathfrak{k}_0$, $x_2 \in \mathfrak{p}_0$, $\tau x_1 = x_1$, $\tau x_2 = -x_2$. 对 $k \in K$, 有

$$k\tau x = kx_1 - kx_2 = \tau k x_1 + \tau k x_2 = \tau k x.$$

故 $k\tau = \tau k$.

反之, $k \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$, 且 $k\tau = \tau k$. $\forall x \in \mathfrak{k}_0$ 有

$$\tau k x = k \tau x = kx,$$

即 $kx \in \mathfrak{k}_0$, 故 $k \in K$.

(3) $k \in K$ 当且仅当 $\tau k = k\tau$, 即 $\tau k^{-1} = k^{-1}\tau$, 即 $\tau k^{-1}\tau = k^{-1}$, 即 $k^* = k^{-1}$. 故 $k \in K$ 当且仅当 $k \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0 \cap U(n)$. □

定理 1 设 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 分解, 又 $\rho \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$. 则有分解

$$\rho = kh, \tag{1.5.3}$$

其中 $k \in K$, $h = e^{\mathrm{ad}\,x}$, $x \in \mathfrak{p}_0$.

证 由引理 3 知 $\rho^* \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$. 由命题 3 知 $\rho = kh$, $k \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0 \cap U(n) = K$. h 正定 Hermite, 且 $h = e^W$, $W \in \mathrm{aut}\,\mathfrak{g}_0 = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0$, 即 $W = \mathrm{ad}\,x$, $x \in \mathfrak{g}_0$.

又 $e^{t\mathrm{ad}\,x}$ 是 Hermite 的, 故 $\tau h^{-1}\tau = h^* = h$, 即

$$\tau e^{-t\mathrm{ad}\,x}\tau = e^{-t\mathrm{ad}\,\tau x} = e^{t\mathrm{ad}\,x}.$$

故 $\mathrm{ad}\,\tau x = -\mathrm{ad}\,x$, 故 $\tau x = -x$, 故 $x \in \mathfrak{p}_0$. □

系 1 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0 \simeq K \times H$, 其中 $H \simeq \mathfrak{p}_0$ 为欧氏空间, $\simeq$ 表示同胚.

事实上，$\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0$ 是 $GL(n,\mathbf{C})$ 的闭子群，故为拓扑群. 由命题 1 之系知 $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0 \simeq K \times H$, $H = \{e^{\operatorname{ad} x} | x \in \mathfrak{p}_0\} \simeq \mathfrak{p}_0$. □

系 2 $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0/\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \simeq K/K_0$ 有限，其中 $K_0 = \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{k}_0 = \operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \cap K$.

证 令 $\mathfrak{k} = \operatorname{Lie}(\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \cap K)$. 若 $\operatorname{ad} x \in \mathfrak{k}$, 则 $e^{t\operatorname{ad} x} \in \operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \cap K$. 故 $e^{t\operatorname{ad} x}\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0$, $e^{t\operatorname{ad} x}\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0$, $\tau e^{t\operatorname{ad} x} = e^{t\operatorname{ad} x}\tau$. 故 $\tau x = x$. 即 $x \in \mathfrak{k}_0$. 因而 $\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \cap K \subseteq \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{k}_0$. 反之，若 $x \in \mathfrak{k}_0$, 则 $e^{t\operatorname{ad} x}\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0$, 故 $e^{t\operatorname{ad} x} \in \operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \cap K$, 故 $x \in \mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} = \operatorname{ad}\mathfrak{k}_0$, 因而 $\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \cap K$ 与 $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{k}_0$ 均为 $\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0$ 的李子群，且有相同的李代数. 又 $\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 = (\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \cap K) \cdot H$, H 与 $\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0$ 连通，其中 $H = \{e^{\operatorname{ad} x} | x \in \mathfrak{p}_0\}$. 故 $\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \cap K$ 连通. 因而

$$K_0 = \operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \cap K = \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{k}_0.$$

又 $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0 = K \cdot H$, $H \subseteq \operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0$, 故 $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0 = K \cdot \operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0$, 于是

$$\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0/\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 \simeq K/K \cap \operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 = K/K_0.$$

又 $U(n)$ 紧致，故 K 紧致. K/K_0 紧致，而 $\dim \operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0/\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 = 0$, 即 K/K_0 离散，故有限. □

系 3 K_0 是 $\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0$ 的最大紧致子群.

证 因为 $\operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0 = K_0 H$, K_0 紧. 若有子群 $K_1 \supset K_0$. 于是 $k' \in K_1 \setminus K_0$, 于是 $k' = kh$, $k \in K_0$, $h \in H$, $h \neq 1$, 故 $h = k^{-1}k' \in K_1$. 但是 $\{h^n | n = 1, 2, \ldots\}$ 在 $GL(n,\mathbf{R})$ 内不是有界集，故 K_1 非紧. □

系 4 $\mathfrak{k}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的最大紧致子代数.

1.6 共轭定理

定理 1 令 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{k}_0' + \mathfrak{p}_0'$ 是实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的

两个 Cartan 分解，则存在一个 $\phi \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ 使得

$$\phi(\mathfrak{k}_0') = \mathfrak{k}_0, \quad \phi(\mathfrak{p}_0') = \mathfrak{p}_0, \tag{1.6.1}$$

$$\phi(x) = x, \quad x \in (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_0') \cup (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_0'). \tag{1.6.2}$$

证 令 $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{u}' = \mathfrak{k}_0' + i\mathfrak{p}_0'$, σ, τ, τ' 分别为对应 $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$ 的共轭. 如在 §1.4 的定理 1 的证明中所述，有单参数子群 $P^t \subseteq \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 满足 $P = (\tau\tau')^2$, $P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}'$ 亦为 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式，且 $\tau(P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}') = P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}'$. 因而

$$P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}' = P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{u} + P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}' \cap i\mathfrak{u}.$$

但 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}'$ 上负定，在 $i\mathfrak{u}$ 上正定. 故 $P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}' \cap i\mathfrak{u} = 0$, 故 $P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}' \subseteq \mathfrak{u}$, 故 $P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}$. 于是 $\tau = P^{\frac{1}{4}}\tau' P^{-\frac{1}{4}}$. 对 $x' \in \mathfrak{k}_0'$, $\tau P^{\frac{1}{4}}x' = P^{\frac{1}{4}}\tau' P^{-\frac{1}{4}}P^{\frac{1}{4}}x' = P^{\frac{1}{4}}x'$. 对 $y' \in \mathfrak{p}_0'$, 有 $\tau' y' = -y'$, 故 $\tau P^{\frac{1}{4}}y' = P^{\frac{1}{4}}\tau' P^{-\frac{1}{4}}P^{\frac{1}{4}}y' = -P^{\frac{1}{4}}y'$. 即

$$P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{k}_0' = \mathfrak{k}_0, \quad P^{\frac{1}{4}}p_0' = p_0.$$

又由 $\sigma\tau = \tau\sigma$, $\sigma\tau' = \tau'\sigma$, 故 $\sigma P = P\sigma$. 因而 $\sigma P^t = P^t\sigma$ 故 $P^t \subset \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$. 故 $\phi = P^{\frac{1}{4}}$ 为所求. 又 $x \in (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_0') \cup (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_0')$, 得 $\tau x = \tau' x = \pm x$, 故 $Px = x$, $P^{\frac{1}{4}}x = x$. □

系 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的任意两个紧致实形式共轭.

事实上，设 $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的两个紧致实形，则

$$\mathfrak{g}^R = \mathfrak{u} + J\mathfrak{u} = \mathfrak{u}' + J\mathfrak{u}'$$

是两个 Cartan 分解，故存在 $\phi \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^R$ 使得 $\phi\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}$. 而 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^R = \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$. □

本定理说明从实半单李代数的 Cartan 分解所确定的最大紧致子代数相互共轭. 如果所有的最大紧致子代数都共轭，则

从任一最大紧致子代数均可定出一个 Cartan 分解来. 为此需要下面的定理.

E. Cartan 定理 设 $\mathfrak{G}$ 为半单李群, $\mathrm{Lie}\,\mathfrak{G}=\mathfrak{g}_0$, K 是 $\mathfrak{G}$ 的一个最大紧致子群, $\mathrm{Lie}\,K=\mathfrak{k}$, K_0 是 $\mathfrak{G}$ 的任一紧致子群, 则存在 $r\in\mathfrak{G}$, 使得 $rK_0r^{-1}\subseteq K$.

证 本定理的证明可以参看 [31] 的第三章 §5 或者 [16] 的第六章. 我们不再证明. □

定理 2 实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的任意两个最大紧致嵌入代数 $\mathfrak{k}_0$ 与 $\mathfrak{k}_0'$ 是共轭的.

证 在 E. Cartan 定理中令 $\mathfrak{G}=\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$. $K=\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{k}_0$, $K_0=\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{k}_0'$, 于是有 $r\in\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ 使得 $rK_0r^{-1}\subseteq K$. 故 $r\mathfrak{k}_0'\subseteq\mathfrak{k}_0$. 由 $\mathfrak{k}_0'$ 是紧致嵌入的, 故 $r\mathfrak{k}_0'$ 亦然. $\mathfrak{k}_0'$ 最大, $r\mathfrak{k}_0'$ 亦然. 故 $r\mathfrak{k}_0'=\mathfrak{k}_0$.
□

定理 3 设 $\mathfrak{g}_0$ 是实半单李代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^C$, 对应 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭为 σ, $\mathfrak{g}_0'$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的半单子代数, $\mathfrak{g}_0'^C=\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{u}'$ 是 $\mathfrak{g}'$ 的紧致实形, 满足 $\sigma(\mathfrak{u}')=\mathfrak{u}'$, 则存在 $\mathfrak{g}$ 的一个紧致实形 $\mathfrak{u}\supseteq\mathfrak{u}'$, 且 $\sigma(\mathfrak{u})=\mathfrak{u}$.

证 因为 $\mathfrak{g}_0'\subseteq\mathfrak{g}_0$, 故 $\mathfrak{g}'\subset\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'^R\subseteq\mathfrak{g}^R$. $\mathfrak{u}'\subseteq\mathfrak{g}^R$. $\mathfrak{u}'$ 紧致半单, 故是紧致嵌入的. 令 $\mathfrak{u}_1$ 是包含 $\mathfrak{u}'$ 的 $\mathfrak{g}^R$ 的最大紧致嵌入子代数. 则 $\mathfrak{u}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形. 事实上, 若 $\mathfrak{u}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个紧致实形, 则 $\mathfrak{g}^R=\mathfrak{u}_2+i\mathfrak{u}_2$ 是一个 Cartan 分解. 故 $\mathfrak{u}_2$ 为 $\mathfrak{g}^R$ 的最大紧致嵌入子代数. 故 $\mathfrak{u}_1$ 与 $\mathfrak{u}_2$ 共轭. 因而 $\mathfrak{u}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式. 设 τ_1 是 $\mathfrak{u}_1$ 对应的共轭. 令 $P=(\sigma\tau_1)^2$, $\phi=P^{\frac{1}{4}}$, $\phi(\mathfrak{u}_1)=\mathfrak{u}$. 则 $\sigma(\mathfrak{u})=\mathfrak{u}$. 且由 $\mathfrak{u}'\subset\mathfrak{u}_1$, $\sigma(\mathfrak{u}')=\mathfrak{u}'$ 有 $\tau_1\sigma(x)=\sigma(x)$, $\forall x\in\mathfrak{u}'$. 故 $Px=\sigma\tau_1\sigma\tau_1(x)=x$. 故 $\phi(x)=x$, $\forall x\in\mathfrak{u}'$. 于是 $\mathfrak{u}'=\phi(\mathfrak{u}')\subset\phi(\mathfrak{u}_1)=\mathfrak{u}$. 即 $\mathfrak{u}$ 为所求. □

系 设 $\mathfrak{g}_0'$ 是实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的半单子代数. $\mathfrak{g}_0'$ 有 Cartan

分解

$$\mathfrak{g}_0' = \mathfrak{k}_0' + \mathfrak{p}_0'.$$

则存在 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$. 使得

$$\mathfrak{k}_0' \subseteq \mathfrak{k}_0, \quad \mathfrak{p}_0' \subseteq \mathfrak{p}_0.$$

证 因 $\mathfrak{u}' = \mathfrak{k}_0' + i\mathfrak{p}_0'$ 是 $\mathfrak{g}'$ 的紧致实形式. 且有

$$\mathfrak{k}_0' = \mathfrak{g}_0' \cap \mathfrak{u}', \quad \mathfrak{p}_0' = \mathfrak{g}_0' \cap i\mathfrak{u}'.$$

由上述定理, 有 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形 $\mathfrak{u} \supseteq \mathfrak{u}'$, 且 $\sigma(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$. σ 为对应 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭. 令 $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}$, 则 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 分解. 显然

$$\mathfrak{k}_0' = \mathfrak{g}_0' \cap \mathfrak{u}' \subseteq \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0,$$

$$\mathfrak{p}_0' = \mathfrak{g}_0' \cap i\mathfrak{u}' \subseteq \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u} = \mathfrak{p}_0. \qquad \square$$

注 设 σ' 是 $\mathfrak{g}_0'$ 在 $\mathfrak{g}'$ 中的共轭. σ 为 $\mathfrak{g}_0$ 在 $\mathfrak{g}$ 中对应的共轭. 则有 $\sigma|_{\mathfrak{g}_0'} = \sigma'|_{\mathfrak{g}_0'}$, 故 $\sigma|_{\mathfrak{g}'} = \sigma'$; $\sigma'(\mathfrak{u}') = \mathfrak{u}'$. 故 $\sigma(\mathfrak{u}') = \mathfrak{u}'$.

第二章　实半单李代数的 Cartan 子代数与 Iwasawa 分解

2.6　约化 Cartan 子代数

设 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 分解, 则 $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 的一个紧致实形式, $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ 与 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 均为 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}\ (= \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^R)$ 的闭子群. 由 §1.2 的定理 1 知, 对 $s \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$, 或 $s \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$, s 作为 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 中的元素, 是变换 s 在 $\mathfrak{g}$ 上的扩充. 且

$$\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0 \cong G_0 \subseteq \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g},$$

这里 G_0 是以 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0$ 为李代数的连通子群.

令 K 是群 $\mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$ 中对应于子代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}_0$ 的子群, 由于 $\mathfrak{k}_0 \subseteq \mathfrak{g}_0$ 是紧致嵌入的, $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{k}_0$ 是紧致的, 即 K 紧致.

定义 1　$\mathfrak{a}$ 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 **约化 Cartan 子代数**, 如果

(1)　$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_0$;

(2)　$\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{p}_0$ 内是最大可换的.

由 (2) 知 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的可换子代数.

引理 1 设实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 有 Cartan 分解 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$, 且 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_0$ 是一个约化 Cartan 子代数. 则存在 $H\in\mathfrak{a}$, 使得 $\mathfrak{a}=\{X\in\mathfrak{p}_0|[X,\ H]=0\}$ 为 H 在 $\mathfrak{p}_0$ 中的中心化子.

证 设 σ 为 $\mathfrak{g}_0$ 对应的共轭. $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}_0+i\mathfrak{p}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式, 故 $\sigma(\mathfrak{u})=\mathfrak{u}$. 于是 $\sigma|_{\mathfrak{u}}\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$, 仍以 σ 记之. 令 $\mathfrak{a}^*=i\mathfrak{a}$, $A^*=\{\exp\lambda\mathrm{ad}\,x^*|x^*\in\mathfrak{a}^*\}$. 显然 $\mathfrak{a}^*\subseteq i\mathfrak{p}_0\subseteq\mathfrak{u}$. 故 $A^*\subseteq\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$. $\mathfrak{a}^*$ 可换, 故 A^* 可换. A^* 的闭包 $L=\overline{A^*}$ 是 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 的闭子群且可换. 故有 $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{u}$ 使得 $\mathrm{Lie}\,L=\mathrm{ad}\,\mathfrak{l}$. 由 L 可换知 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{l}$ 可换, 故 $\mathfrak{l}$ 可换, 且 $\mathfrak{a}^*\subseteq\mathfrak{l}$. 又对 $\forall x^*\in\mathfrak{a}^*$, 有

$$\sigma\exp\lambda\mathrm{ad}\,x^*\sigma^{-1}=\exp\lambda\mathrm{ad}\,\sigma x^*=\exp(-\lambda\mathrm{ad}\,x^*).$$

故 $\forall a\in L$, 有

$$\sigma a\sigma^{-1}=a^{-1},$$

特别, $\forall y\in\mathfrak{l}$, 有

$$\sigma\exp\lambda\mathrm{ad}\,y\sigma^{-1}=\exp\lambda\mathrm{ad}\,\sigma y=\exp(-\lambda\mathrm{ad}\,y).$$

故有

$$\sigma y=-y,$$

即 $y\in i\mathfrak{p}_0$, 从而有

$$\mathfrak{a}^*\subseteq\mathfrak{l}\subseteq i\mathfrak{p}_0.$$

又 $\mathfrak{a}^*$ 在 $i\mathfrak{p}_0$ 内最大可换, 故 $\mathfrak{a}^*=\mathfrak{l}$, 即 $\overline{A^*}=A^*\subseteq\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$. 故 A^* 是紧致可换群, 因而是一个环面.

因而有 $H'\in\mathfrak{a}^*$, 使得 $\exp t\mathrm{ad}H'$ 在 A^* 内稠密. 令 $\mathfrak{z}$ 为 H' 在 $i\mathfrak{p}_0$ 中的中心化子, $Z=\exp t\mathrm{ad}\,z$, $z\in\mathfrak{z}$. 则 Z 与 $e^{t\mathrm{ad}\,H'}$ 可换, 故与 A^* 可换. 故 $[z,\ \mathfrak{a}^*]=0$. $\mathfrak{a}^*$ 最大可换, 故 $z\in\mathfrak{a}^*$. 即 $\mathfrak{z}=\mathfrak{a}^*$. 令 $H=iH'$, 则 $H\in\mathfrak{a}$ 使得 $\mathfrak{a}=\{x\in\mathfrak{p}_0|[X,\ H]=0\}$.□

定理 1 设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}_0$ 中一个固定的约化 Cartan 子代数，则对任何 $x \in \mathfrak{p}_0$, 存在 $k \in K(= \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{k}_0)$ 使得

$$kx \in \mathfrak{a}. \tag{2.1.1}$$

证 取 $H \in \mathfrak{a}$ 使得 $\mathfrak{a} = \{a|a \in \mathfrak{p}_0, [a, H] = 0\}$. 则

$$f(k) = (H, kx),\ k \in K,\ x \in \mathfrak{p}_0$$

是 K 上连续函数. 由 K 紧致，故有最小值 $f(k_0)$. 于是函数

$$\phi(t) = (H. \exp(t \mathrm{ad}\, z)k_0 x),\ z \in \mathfrak{k}_0$$

满足

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = 0.$$

即有

$$(H,\ [z,\ k_0 x]) = ([k_0 x,\ H],\ z) = 0.$$

由于 $k_0 x \in \mathfrak{p}_0$, $H \in \mathfrak{p}_0$, 故 $[k_0 x,\ H] \in \mathfrak{k}_0$, $z \in \mathfrak{k}_0$. 但 Killing 型在 $\mathfrak{k}_0$ 上负定，故 $[k_0 x,\ H] = 0$. 故 $k_0 x \in \mathfrak{a}$. □

此定理换一种说法，可叙述为下面形式.

定理 1′ $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0^*$, 则对于任一元素 $x \in \mathfrak{p}_0^*$ 存在一个 $k \in K$ 使得 $k(x) \in \mathfrak{a}^*$. $\mathfrak{a}^*$ 是 $\mathfrak{p}_0^*$ 内的最大可换子代数.

系 1 任何两个约化 Cartan 子代数 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ 是共轭的.

事实上，取 $H \in \mathfrak{a}$ 使得 $\mathfrak{a} = \{X \in \mathfrak{p}_0|[H,\ X] = 0\}$. 有 $k \in K$ 使得 $kH \in \mathfrak{a}'$. 故 $H \in k^{-1}\mathfrak{a}'$, 因而 $k^{-1}\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$, 故 $\mathfrak{a}' \subseteq k\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}'$ 最大可换，故 $\mathfrak{a}' = k\mathfrak{a}$. 即 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{a}'$ 共轭. □

系 2 设 $\mathfrak{u}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式. $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{u}$ 的最大可换子代数. 则对任一 $x \in \mathfrak{u}$, 均有 $k \in \mathrm{Ad}\mathfrak{u}$ 使得 $kx \in \mathfrak{h}$.

事实上，$\mathfrak{g}^R = \mathfrak{u} + J\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{g}^R$ 的 Cartan 分解，$J\mathfrak{h} \subset J\mathfrak{u}$ 是 $J\mathfrak{u}$ 内最大可换子代数，即约化 Cartan 子代数. 对任何 $x \in \mathfrak{u}$，即 $Jx \in J\mathfrak{u}$ 均有 $k \in \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}^R}\mathfrak{u}$ 使得 $kJx \in J\mathfrak{h}$. 由于 $k \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u} \subseteq \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$. 故 $kJ = Jk$，即 $kx \in \mathfrak{h}$. □

定理 2 设 $\mathfrak{u}$ 为紧致李代数，$\mathfrak{h}$ 为其最大可换子代数，则对任一 $x \in \mathfrak{u}$，存在 $k \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 使得 $kx \in \mathfrak{h}$.

证 如果 $\mathfrak{u}$ 半单，则从定理 1 之系 2 知此定理成立. 现设 $\mathfrak{u}$ 非半单，则 $\mathfrak{u} = \mathfrak{c} + \mathfrak{u}_1$，其中 $\mathfrak{c}$ 为中心，$\mathfrak{u}_1$ 是 $\mathfrak{u}$ 的极大半单理想. 于是 $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} + \mathfrak{h}_1$，$\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 内的最大可换子代数. 对任一 $x \in \mathfrak{u}$，有 $x = x_0 + x_1$，$x_0 \in \mathfrak{c}$，$x_1 \in \mathfrak{u}_1$. 故有 $k \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}_1 \subseteq \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 使得 $kx_1 \in \mathfrak{h}_1$. 而且 $kx = x_0 + kx_1 \in \mathfrak{c} + \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$. □

系 任何紧致李代数的任意两个极大交换子代数都是共轭的. □

定理 3 设 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个 Cartan 子代数. 则存在 $s \in \mathrm{Ad}\mathfrak{g}$，使得 $s\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.

证 令 $\mathfrak{h}_{1R}, \mathfrak{h}_{2R}$ 分别为 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 对应的幂等. 由 §1.3 的定理 3 知，有 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形 $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ 使得 $i\mathfrak{h}_{1R} \subseteq \mathfrak{u}_1$，$i\mathfrak{h}_{2R} \subseteq \mathfrak{u}_2$. 由于 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 是 Cartan 子代数，故是最大可换的，因而 $i\mathfrak{h}_{1R}, i\mathfrak{h}_{2R}$ 是 $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ 的最大可换子代数. 又 $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ 均为 $\mathfrak{g}^R$ 的极大紧致嵌入子代数，故有 $\phi \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$，使得 $\phi\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$. 故 $\phi(i\mathfrak{h}_{1R})$，$i\mathfrak{h}_{2R} \subseteq \mathfrak{u}_2$. 故有 $g \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}_2$ 使得 $g\phi(i\mathfrak{h}_{1R}) = i\mathfrak{h}_{2R}$. 故 $g\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. 显然 $s = g\phi \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$. □

定义 2 $\mathfrak{g}_0$ 的约化 Cartan 子代数的维数称为 $\mathfrak{g}_0$ 的 **秩**.

由于 $\mathfrak{g}_0$ 的所有 Cartan 子代数是共轭的，故有相同的维数，因而上述定义是合理的.

定义 3 $\mathfrak{g}^R$ 的秩称为复李代数 $\mathfrak{g}$ 的 **秩**.

2.7 实半单李代数的 Cartan 子代数

定义 1 向量空间 V 的线性变换 ϕ 叫做半单的，如果对 ϕ 的任一不变子空间 V' 都有 ϕ 的不变子空间 V''，使得 $V = V'\dot{+}V''$.

从线性代数理论知，下面命题成立.

命题 1 1) 半单线性变换 ϕ 在不变子空间上的限制也是半单的.

2) 复向量空间 V 上线性变换 ϕ 半单当且仅当 ϕ 的矩阵可以对角化，即有基使 ϕ 在此基下的矩阵为

$$\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots.\ \lambda_n).$$

3) 实向量空间 V 上线性变换 ϕ 半单当且仅当有基使 ϕ 在此基下的矩阵为

$$\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_t).$$

其中 $\lambda_i \in \mathbf{R}$, A_j 为二阶实方阵，特征多项式为二次不可约多项式.

4) 实向量空间 V 的线性变换 ϕ 半单当且仅当 ϕ 在 V^C 上的扩充半单.

5) 线性变换 ϕ 半单当且仅当其最低多项式无重因式.

证 略. □

定义 2 实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数 $\mathfrak{h}_0$ 称为 **Cartan 子代数**，如果 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^C$ 是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 的 Cartan 子代数.

我们知道复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 最大可换子代数，而且 $\forall H \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}\, H$ 是半单的. 由此可得下面命题.

命题 1 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数之充要条件是:

(1) $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的最大可换子代数;

(2) $\forall H \in \mathfrak{h}_0, \operatorname{ad} H$ 半单.

证 必要性. $\mathfrak{h}_0$ 是 Cartan 子代数. 故 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^C$ 是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 的 Cartan 子代数, 因而是最大可换的, 故 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的最大可换子代数. $\forall H \in \mathfrak{h}_0, \operatorname{ad} H$ 在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 中半单, 因而在 $\mathfrak{g}_0$ 中半单.

充分性. 由于 $\mathfrak{h}_0$ 可换, 且 $H_0 \in \mathfrak{h}_0, \operatorname{ad} H_0$ 半单. 故 $\mathfrak{g}$ 有分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 + \sum \mathfrak{g}^\alpha, \ \alpha \neq 0,$$

其中

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{x \in \mathfrak{g} | \operatorname{ad} H_0 x = \alpha(H_0)x, H_0 \in \mathfrak{h}_0\}.$$

由于 $\mathfrak{h}_0$ 可换, 故 $\mathfrak{h}_0 \subseteq \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{g}_0$, 又 $\operatorname{ad} H_0$ 半单, 故 $\mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \dot{+} \mathfrak{h}'_0$. $\operatorname{ad} \mathfrak{h}_0(\mathfrak{h}') \subseteq \mathfrak{h}'$. 且 $H' \in \mathfrak{h}'$ 有 $[\mathfrak{h}_0, H'] = 0$, 故与 $\mathfrak{h}_0$ 最大可换矛盾, 故 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{g}_0$.

显然上述分解对 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^C$ 亦成立. 自然 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^0$. 对任一 $x \in \mathfrak{g}^0$ 有 $x = x_1 + ix_2$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}_0$, $H \in \mathfrak{h}_0$, 有 $\operatorname{ad} H x = 0$. 即 $\operatorname{ad} H \cdot x_1 + i \operatorname{ad} H \cdot x_2 = 0$. 故 $\operatorname{ad} H x_1 = \operatorname{ad} H x_2 = 0$, 即 $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}_0$. 故 $x \in \mathfrak{h}_0^C = \mathfrak{h}$. 故 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$. 即 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. □

定义 3 设 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数, 分别称

$$\mathfrak{h}_0^+ = \{H \in \mathfrak{h}_0 | \operatorname{ad} H \text{ 的特征值纯虚}\},$$
$$\mathfrak{h}_0^- = \{H \in \mathfrak{h}_0 | \operatorname{ad} H \text{ 的特征值实}\}$$

为 $\mathfrak{h}_0$ 的 **环面部分, 向量部分**.

定义 4 设 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是 Cartan 分解. 如果有

$$\mathfrak{h}_0^+ = \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{h}_0, \ \mathfrak{h}_0^- = \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{h}_0, \ \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0^+ + \mathfrak{h}_0^-, \tag{2.2.1}$$

则称 $\mathfrak{h}_0$ 对此 Cartan 分解有 **正规分解**.

定理 1 设 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数，则存在 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 使得 $\mathfrak{h}_0$ 对此 Cartan 分解有正规分解.

证 令 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^C$, 它是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 的 Cartan 子代数. 令 $\mathfrak{h}_R$ 是 $\mathfrak{h}$ 的幂等. 于是由 §1.3 的定理 3 知有 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式 $\mathfrak{u} \supseteq i\mathfrak{h}_R$.

设 σ, τ 分别为 $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{u}$ 所决定的共轭. 如在 §1.4 定理 1 的证明中所述，令 $P = (\sigma\tau)^2$, $\phi = P^{1/4}$. 则 $\phi(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}_1$ 亦为 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式，且 $\sigma(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}_1$. 由 $\sigma(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$, 知 $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 由 $(\mathfrak{h}^*)^C = \mathfrak{h}$ 及 $\tau(i\mathfrak{h}^*) = i\mathfrak{h}^*$, 知 $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 因而有 $\phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 若 τ_1 为由 $\mathfrak{u}_1$ 决定的共轭，则有 $\tau_1 = \phi\tau\phi^{-1}$, $\tau_1(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

令 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$, 其中 $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}_1$. 这是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 分解. 由 $\sigma\tau_1 = \tau_1\sigma$, 故 $\forall x \in \mathfrak{h}_0$, 有

$$\sigma\tau_1(x) = \tau_1\sigma(x) = \tau_1(x),$$

故 $\tau_1(x) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0$. 因而 $\mathfrak{h}_0$ 是 τ_1 的不变子空间. 故有分解

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{u}_1 \dotplus \mathfrak{h}_0 \cap i\mathfrak{u}_1,$$

由于 $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{u}_1 \subseteq \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{k}_0$, 故 $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$. 又 $\mathfrak{h}_0 \cap i\mathfrak{u}_1 \subseteq \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{p}_0$, 故 $\mathfrak{h}_0 \cap i\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$. 故

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 \dotplus \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0.$$

又 $x \in \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 \subseteq \mathfrak{k}_0$, $\mathrm{ad}\, x$ 的特征值是纯虚数，故 $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 \subseteq \mathfrak{h}_0^+$. 若 $x \in \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_0$, 则 $\mathrm{ad}\, x$ 的特征值是实数，故 $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{h}_0^-$. 又 $\dim(\mathfrak{h}_0^+ \cap \mathfrak{h}_0^-) = 0$. 故定理成立. □

系 1 设 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是一个 Cartan 分解，则 $\mathfrak{g}_0$ 的任一 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0'$ 必共轭于一个对 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 有正规分解的 Cartan 子代数.

证 对 $\mathfrak{h}_0'$ 有 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0' + \mathfrak{p}_0'$，使得 $\mathfrak{h}_0'$ 有正规分解. 即 $\mathfrak{h}_0' = \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{k}_0' \dot{+} \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{p}_0'$. 又由 Caran 分解的共轭性知有 $\phi \in \operatorname{Ad} \mathfrak{g}_0$ 使得 $\phi(\mathfrak{k}_0') = \mathfrak{k}_0$, $\phi(\mathfrak{p}_0') = \mathfrak{p}_0$. 显然 $\mathfrak{h}_0 = \phi(\mathfrak{h}_0')$ 仍为 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. 显然有 $\phi(\mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{k}_0') = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$, $\phi(\mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{p}_0') = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$. □

系 2 设 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是一个 Cartan 分解. $\mathfrak{a}$ 是一个约化 Cartan 子代数. 则 $\mathfrak{g}_0$ 的任一 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0'$ 必共轭于一 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0^+ \dot{+} \mathfrak{h}_0^-$，其中

$$\mathfrak{h}_0^+ \subseteq \mathfrak{k}_0, \quad \mathfrak{h}_0^- \subseteq \mathfrak{a}.$$

证 从系 1 知有 $\phi \in \operatorname{Ad} \mathfrak{g}_0$ 使得

$$\phi(\mathfrak{h}_0') = \phi(\mathfrak{h}_0')^+ \dot{+} \phi(\mathfrak{h}_0')^-,$$
$$\phi(\mathfrak{h}_0')^+ \subseteq \mathfrak{k}_0, \ \phi(\mathfrak{h}_0')^- \subseteq \mathfrak{p}_0.$$

又 $\phi(\mathfrak{h}_0')^-$ 可换，故有 $k \in \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_0} \mathfrak{k}_0$ 使得

$$k\phi(\mathfrak{h}_0')^- \subseteq \mathfrak{a}, \ k(\mathfrak{k}_0) = \mathfrak{k}_0, \ k\phi(\mathfrak{h}_0')^+ \subseteq \mathfrak{k}_0.$$

故 $\mathfrak{h}_0 = k\phi(\mathfrak{h}_0')$ 即为所求. □

引理 1 对 Cartan 分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 有正规分解的两个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1$、$\mathfrak{h}_2$，若 $\mathfrak{h}_1^- = \mathfrak{h}_2^- (= \mathfrak{h}^-)$，则有 $k \in \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_0} \mathfrak{k}_0$ 使得

$$k\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2.$$

证 令 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}^-}$ 是 $\mathfrak{h}^-$ 在 $\mathfrak{k}_0$ 内的中心化子，则 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}} \cong \operatorname{ad} \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}^-}$. 令 $K_0 = \{k \in \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_0} \mathfrak{k}_0 | kx = x, x \in \mathfrak{h}^-\}$. K_0 是 K 的闭子群，因而紧致，李 $K_0 \cong \operatorname{ad} \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}^-} \cong \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}^-}$. 故 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}^-}$ 是紧致李代数. 由 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 的可换性知 $\mathfrak{h}_1^+, \mathfrak{h}_2^+ \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}^-}$. 由 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 的最大可换性知 $\mathfrak{h}_1^+, \mathfrak{h}_2^+$ 都

是 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}^-}$ 的最大可换子代数，即 Cartan 子代数．故有 $k \in K_0$ 使得 $k\mathfrak{h}_1^+ = \mathfrak{h}_2^+$．由 K_0 的定义知 $k\mathfrak{h}^- = \mathfrak{h}^-$．故 $k\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$． □

引理 2 设对 Cartan 分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 有正规分解的两个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$．若 $\mathfrak{h}_1^+ = \mathfrak{h}_2^+ = \mathfrak{h}^+$，则有 $g \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ 使得

$$g\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2.$$

证 设 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}^+) = \{x \in \mathfrak{g}_0 | [x, \mathfrak{h}^+] = 0\}$．则容易证明 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}^+) = \mathfrak{c} + \mathfrak{g}_1$．$\mathfrak{c}$ 是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}^+)$ 的中心，$\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{z}(\mathfrak{h}^+), \mathfrak{z}(\mathfrak{h}^+)]$ 半单．显然

$$\mathfrak{h}^+ \subset \mathfrak{c} \subset \mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{h}^+),\ i = 1,\ 2.$$

故

$$\mathfrak{h}_i = \mathfrak{c} + (\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}_i^-),\ i = 1,\ 2.$$

故 $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}_1^-, \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}_2^-$ 都是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数，由于其环面部分为 0，故均为 $\mathfrak{g}_1$ 的约化 Cartan 子代数，故有 $g \in \mathrm{Ad}\mathfrak{g}_1 \subset \mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$ 使得

$$g(\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}_1^-) = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}_2^-.$$

因 $\mathfrak{c}$ 是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}^+)$ 的中心，故 $gx = x, \forall x \in \mathfrak{c}$．故引理成立． □

定理 2 设 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 是实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的两个 Cartan 子代数．$\mathfrak{h}_1^+, \mathfrak{h}_2^+, \mathfrak{h}_1^-, \mathfrak{h}_2^-$ 分别为 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 的环面部分与向量部分．则下述三个条件是等价的：

(1) $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 共轭；

(2) $\mathfrak{h}_1^+$ 与 $\mathfrak{h}_2^+$ 共轭；

(3) $\mathfrak{h}_1^-$ 与 $\mathfrak{h}_2^-$ 共轭．

证 (1) $\Longrightarrow$ (2), (3):

$\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 共轭，即有 $s \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ 使 $s\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$．由 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_1^+$, $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_2^+$ 的特征值纯虚，$\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_1^-, \mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_2^-$ 的特征值实．故 $s\mathfrak{h}_1^+ = \mathfrak{h}_2^+$, $s\mathfrak{h}_1^+ = \mathfrak{h}_2^-$．

(2), (3) $\Longrightarrow$ (1):

设有 $s \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ 使得 $s\mathfrak{h}_1^+ = \mathfrak{h}_2^+$ (或 $s\mathfrak{h}_1^- = \mathfrak{h}_2^-$), 于是 $s\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2^+ + s\mathfrak{h}_1^-$ ($s\mathfrak{h}_1 = s\mathfrak{h}_1^+ + \mathfrak{h}_2^-$). 对 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, s\mathfrak{h}_1$ 有 $\mathfrak{g}_0$ 的满足下述条件的三个 Cartan 分解:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1, \quad && \mathfrak{h}_1^+ = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{k}_1, \quad && \mathfrak{h}_1^- = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{p}_1,\\ &\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{p}_2, && \mathfrak{h}_2^+ = \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{k}_2, && \mathfrak{h}_2^- = \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{p}_2,\\ &\mathfrak{g}_0 = s\mathfrak{k}_1 + s\mathfrak{p}_1, && s\mathfrak{h}_1^+ = s\mathfrak{h}_1 \cap s\mathfrak{k}_1, && s\mathfrak{h}_2^- = s\mathfrak{h}_1 \cap s\mathfrak{p}_1. \end{aligned}$$

由 1.6 的定理 1 及其系知有 $s_0 \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ 使得 $s_0(s\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2$, $s_0(s\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2$. 由于 $\mathfrak{h}_2^+ \subseteq \mathfrak{k}_2 \cap s\mathfrak{k}_1$ ($\mathfrak{h}_2^- \subseteq \mathfrak{p}_2 \cap s\mathfrak{p}_1$), 故对 $\forall H \in \mathfrak{h}_2^+$ ($H \in \mathfrak{h}_2^-$) 均有 $s_0(H) = H$.

令 $\phi = s_0 s$, 于是 $\phi(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2$, $\phi(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2$, $\phi(\mathfrak{h}_1^+) = \mathfrak{h}_2^+$ ($\phi(\mathfrak{h}_1^-) = \mathfrak{h}_2^-$). 由引理 2 和引理 1 知有 $g \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_2^+)$ ($g \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1^-)$) 使得 $g\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. □

系 设 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的两个 Cartan 子代数, 对 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 有正规分解, 且 $\mathfrak{h}_i^+ \subset \mathfrak{h}_0^+$, $\mathfrak{h}_0^+$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的约化 Cartan 子代数. 则 $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 共轭的充分必要条件是 $\gamma_i = (\mathfrak{h}_i^+)^{\perp} \cap \mathfrak{h}_0^+$ 共轭.

定理 3 若 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是一个 Cartan 分解, $\mathfrak{a}$ 是约化 Cartan 子代数, 则存在一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0 \supset \mathfrak{a}$, 且

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0} + \mathfrak{a}, \ \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0} \subseteq \mathfrak{k}_0.$$

$\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}_0$ 的向量部分. 故所有包含 $\mathfrak{a}$ 的 Cartan 子代数都是共轭的.

证 令 $\mathfrak{h}_0$ 为包含 $\mathfrak{a}$ 的最大可换子代数. τ 为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 的紧致实形 $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ 对应的共轭. 若 $x \in \mathfrak{h}_0, y \in \mathfrak{a}$, 则有

$$[x - \tau(x), y] = [x, y] - \tau[x, \tau(y)] = [x, y] + \tau[x, y] = 0.$$

又 $x - \tau(x) \in \mathfrak{p}_0$, 故 $x - \tau(x) \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}_0$. 于是 $\tau(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$, 因而

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{u} \dot{+} \mathfrak{h}_0 \cap i\mathfrak{u}.$$

其中 $\mathfrak{u}\cap\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{u}\cap\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{k}_0$, 记为 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0}$, $\mathfrak{h}_0\cap i\mathfrak{u}=\mathfrak{h}_0\cap i\mathfrak{u}\cap\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{p}_0\supseteq\mathfrak{a}$. 但由 $\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{p}_0$ 可换, $\mathfrak{a}$ 极大可换, 故 $\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{p}_0=\mathfrak{a}$. 因而

$$\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0}+\mathfrak{a},\quad \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0}\subseteq\mathfrak{k}_0,\ \mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_0.$$

又 $\forall H\in\mathfrak{h}_0$, 有 $H=H_1+H_2$, $H_1\in\mathfrak{k}_0$, $H_2\in\mathfrak{p}_0$. $[H_1,H_2]=0$. 又 $\forall x\in\mathfrak{k}_0$, $\operatorname{ad}x$ 半单, $\forall y\in\mathfrak{p}_0$, $\operatorname{ad}y$ 亦半单. 故 $\operatorname{ad}H$ 半单. 因而 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. □

定义 5 若 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 子代数包含一个约化 Cartan 子代数, 则称为 **正则 Cartan 子代数**, 也称 **最大向量 Cartan 子代数**, **V- 正常 Cartan 子代数**.

由命题 2 知所有正则 Cartan 子代数都是共轭的.

2.8 Iwasawa 分解

2.8.1 正规分解 Cartan 子代数与根系

设 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ 是实半单代数 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 分解. σ, τ 分别为 $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}_0+i\mathfrak{p}_0$ 在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^C$ 中决定的共轭. 令 $\theta=\sigma\tau$. 则有下面的引理 1.

引理 1 假定如上, 则有以下结论.

(1) $\mathfrak{k}_0=\{x|x\in\mathfrak{g}_0,\ \theta x=x\}=\{y|y\in\mathfrak{u},\ \theta y=y\}$.

(2) $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_0^C=\{x|x\in\mathfrak{g},\ \theta x=x\}$.

(3) $\forall x\in\mathfrak{g}_0$, 有 $x+\theta x\in\mathfrak{k}_0$.

(4) $\forall x\in\mathfrak{g}$, 有 $x+\theta x\in\mathfrak{k}$.

证 (1) $x\in\mathfrak{k}_0$, 则 $\sigma x=\tau x=x$, 故 $\theta x=x$. 反之, 若 $x\in\mathfrak{g}_0$ 且 $\theta x=x$, 则 $\tau x=\tau\theta x=\sigma\tau^2x=\sigma x=x$, 故 $x\in\mathfrak{u}$. 即 $x\in\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{u}=\mathfrak{k}_0$. 因而 (1) 成立.

(2) 若 $x\in\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_0^C$, 则由 $\theta=\sigma\tau\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ 知 $\theta x=x$.

反之，若 $x \in \mathfrak{g}$, 且 $\theta x = x$. 设 $x = x_1 + ix_2$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}_0$ 则 $\theta x = \theta x_1 + i\theta x_2 = x_1 + ix_2$. 由于 $\theta x_1, \theta x_2 \in \mathfrak{g}_0$. 故 $\theta x_1 = x_1$, $\theta x_2 = x_2$. 即 $x_1, x_2 \in \mathfrak{k}_0$. 因而 (2) 成立.

(3) 由于 $\tau\sigma = \sigma\tau$, 故知 $\theta^2 = \sigma^2\tau^2 = I$. 因而对 $x \in \mathfrak{g}_0$, 有 $\theta(x + \theta x) = \theta x + x$. 由 (1) 知 $x + \theta x \in \mathfrak{k}_0$.

(4) $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\theta(x + \theta x) = x + \theta x$, 故由 (2) 知 $x + \theta x \in \mathfrak{k}$. □

引理 2 设 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. $\mathfrak{h}_0^+$, $\mathfrak{h}_0^-$ 分别为 $\mathfrak{h}_0$ 的环面部分及向量部分. $\mathfrak{h}_R$ 为 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^C$ 的幂等. 则 $\mathfrak{h}_R = i\mathfrak{h}_0^+ + \mathfrak{h}_0^-$.

证 若 $H \in i\mathfrak{h}_0^+$, 则 $iH \in \mathfrak{h}_0^+$, $\mathrm{ad}\, iH$ 的特征值为纯虚数，故 $\mathrm{ad}\, H$ 的特征值为实数. 故 $iH \in \mathfrak{h}_R$. 若 $H \in \mathfrak{h}_0^-$, 则 $\mathrm{ad}\, H$ 的特征值是实的，故 $H \in \mathfrak{h}_R$. 因而 $i\mathfrak{h}_0^+ + \mathfrak{h}_0^- \subseteq \mathfrak{h}_R$. 又 $\dim \mathfrak{h}_R = \dim i\mathfrak{h}_0^+ + \dim \mathfrak{h}_0^- = \dim(i\mathfrak{h}_0^+ \dot{+} \mathfrak{h}_0^-)$. 故引理成立. □

下面假设 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0$ 对 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 有正规分解. 即 $\mathfrak{h}_0^+ \subset \mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{h}_0^- \subset \mathfrak{p}_0$, σ, τ 分别为 $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ 所决定的共轭. $\theta = \sigma\tau$. $\mathfrak{h}_R$ 是 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^C$ 中的幂等. $\Delta \subseteq \mathfrak{h}_R$ 为根系. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 对 $\mathfrak{h}$ 有下列分解:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha.$$

引理 3 $\forall H \in \mathfrak{h}_R$, $H = H_1 + H_2$, $H_1 \in i\mathfrak{h}_0^+$, $H_2 \in \mathfrak{h}_0^-$, 则

$$\tau(H) = -H;\ \ \sigma(H) = -H_1 + H_2;\ \ \theta(H) = -\sigma(H).$$

进而 $\tau\mathfrak{h}_R = \sigma\mathfrak{h}_R = \theta\mathfrak{h}_R = \mathfrak{h}_R$, $\tau\mathfrak{h} = \sigma\mathfrak{h} = \theta\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.

证 因 $H_1 \in i\mathfrak{h}_0^+ \subseteq i\mathfrak{k}_0$, 故 $\sigma(H_1) = \tau(H_1) = -H_1$. 又 $H_2 \in \mathfrak{h}_0^- \subseteq \mathfrak{p}_0$, 故 $\sigma(H_2) = -\tau(H_2) = H_2$. 故 $\tau(H) = -H$, $\sigma(H) = -H_1 + H_2$, $\theta(H) = H_1 - H_2 = -\sigma(H)$. □

引理 4 $\forall\alpha\in\Delta$, 有 $\tau(\alpha)$, $\sigma(\alpha)$, $\theta(\alpha)\in\Delta$, 且 $\theta(\mathfrak{g}^\alpha)=\mathfrak{g}^{\theta(\alpha)}$. $\forall H\in\mathfrak{h}$, 有 $\alpha(\sigma H)=-\overline{\alpha(\theta H)}=-\overline{\theta(\alpha)(H)}$, $\alpha(\tau H)=-\overline{\alpha(H)}$.

证 因 $\alpha\in\Delta\subset\mathfrak{h}_R$, 故 $\tau\alpha=-\alpha$, 故 $\tau\alpha\in\Delta$. 又对任何 $H\in\mathfrak{h}$, $X_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha$ 有

$$[H,\ \theta X_\alpha]=\theta[\theta H,\ X_\alpha]=\alpha(\theta(H))\theta X_\alpha,$$
$$\alpha(\theta(H))=(\alpha,\ \theta(H))=(\theta(\alpha),\ H)=\theta(\alpha)(H).$$

故 $\theta(\alpha)\in\Delta$, $\theta X_\alpha\in\mathfrak{g}^{\theta\alpha}$, 即 $\theta\mathfrak{g}^\alpha=\mathfrak{g}^{\theta\alpha}$. $\sigma(\alpha)=-\theta(\alpha)\in\Delta$. 而

$$\sigma(\alpha)(H)=(\sigma(\alpha),\sigma^2H)=\overline{(\alpha,\sigma H)}=\overline{\alpha(\sigma H)}.$$

又 $\sigma(\alpha)(H)=-\theta(\alpha)(H)=-\alpha(\theta(H))$, 故

$$\alpha(\sigma(H))=-\overline{\alpha(\theta(H))}=-\overline{\theta(\alpha)(H)}.$$

最后有

$$\alpha(\tau H)=(\tau^2\alpha,\ \tau H)=\overline{(\tau\alpha,\ H)}=-\overline{(\alpha,\ H)}=-\overline{\alpha(H)}.\quad\square$$

2.8.2 约化正根系

设 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ 是 Cartan 分解. $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0}+\mathfrak{a}$ 是相应的正则 Cartan 子代数. $\mathfrak{h}_R=i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0}+\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一个幂等. 于是 $H\in\mathfrak{h}_R$ 有 $H_1\in i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0}$, $H_2\in\mathfrak{a}$, 使得 $H=H_1+H_2$. 映射 $H\longrightarrow H_2$ 称为 $\mathfrak{h}_R$ 到 $\mathfrak{a}$ 上的 **正射影**.

定义 1 若在 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{h}_R$ 中均定义了顺序, 而且从 $H>0$ 可推出 $H_2\geq 0$, 则称 $\mathfrak{h}_R$ 的顺序对 $\mathfrak{a}$ 的顺序是 **容许的**.

以 Δ^+, Δ^- 分别表示此顺序下的正负根系. 对任一根 $\alpha\in\Delta$, 有 $\alpha_1\in i\mathfrak{h}_k$, $\alpha_2\in\mathfrak{a}$ 使得 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. 令

$$
\begin{aligned}
P_- = \Delta^+ \cap i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0} \quad &= \{\alpha \in \Delta^+ | \alpha_2 = 0\} \\
&= \{\alpha \in \Delta | \alpha_1 > 0, \alpha_2 = 0\}, \\
P_+ = \Delta^+ \setminus P_- \quad &= \{\alpha \in \Delta^+ | \alpha_2 > 0\} \\
&= \{\alpha \in \Delta | \alpha_2 > 0\}.
\end{aligned}
$$

显然 P_- 在 $\mathfrak{a}$ 的上投影是 0. 以 P'_+ 记 P_+ 在 $\mathfrak{a}$ 上的投影, 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的 **约化正根系**. 显然 $P'_+ \subset \mathfrak{a}$. 我们有下面的结果.

引理 5 P_-, P_+ 如上所述. 则

(1) $P_- = \{\alpha \in \Delta^+ | \sigma(\alpha) = \tau(\alpha)\} = \{\alpha \in \Delta^+ | \theta(\alpha) = \alpha\}$.

(2) $P_+ = \{\alpha \in \Delta^+ | \sigma(\alpha) = -\theta(\alpha) \in P_+\}$.

证 设 $\alpha \in \Delta^+$, 故 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \in i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0}$, $\alpha_2 \in \mathfrak{a}$. 由引理 3 得 $\tau(\alpha) = -\alpha$, $\sigma(\alpha) = -\alpha_1 + \alpha_2$, $\theta(\alpha) = \alpha_1 - \alpha_2$.

自然 $\alpha \in \Delta^+$, $\alpha \in P_-$, 即 $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 > 0$. 故 (1) 成立.

$\alpha \in \Delta^+$, $\alpha \in P_+$, 即 $\alpha_2 > 0$. 故 (2) 成立. □

引理 6 若 $\alpha \in P_-$, 则 $\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} \subseteq \mathfrak{k}_0^C = \mathfrak{k}$.

证 由于 $\alpha \in P_-$, 故 $\sigma(\alpha) = -\alpha$, $\theta(\alpha) = \alpha$. 若 $Z \in \mathfrak{g}^\alpha$, 则 $\theta(Z) \in \mathfrak{g}^{\theta(\alpha)} = \mathfrak{g}^\alpha$. 又 $\theta^2 = I$. 故 $\theta(Z) = \pm Z$. 若 $\theta(Z) = Z$, 则 $Z \in \mathfrak{k}$. 若 $\theta(Z) = -Z$, $Z = Z_1 + Z_2$, $Z_1 \in \mathfrak{k}$, $Z_2 \in \mathfrak{p}_0^C$, 则 $\theta(Z) = \theta Z_1 + \theta Z_2 = Z_1 - Z_2 = -Z_1 - Z_2$. 故 $Z_1 = 0$, $Z = Z_2 \in \mathfrak{p}_0^C$. 又对 $\forall H \in \mathfrak{a}$ 有 $(\alpha, H)Z = [H, Z] = [\theta(H), \theta(Z)] = \theta[H, Z] = (\alpha, H)\theta(Z) = -(\alpha, H)Z$. 故 $[H, Z] = 0$. 若 $Z \neq 0$, 则 $Z \in \mathfrak{a}^C \subseteq \mathfrak{h}$. 矛盾. 因此 $\theta(Z) = -Z$ 是不可能的. 同理可证 $\mathfrak{g}^{-\alpha} \subseteq \mathfrak{k}$. 即 $\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} \subseteq \mathfrak{k}$. □

2.3.3 Iwasawa 分解

定理 1 设 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 为 Cartan 分解, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0} + \mathfrak{a}$

是对应的正则 Cartan 子代数. 令 $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in P_+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}\cap\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{a}+\mathfrak{n}_0$. 则 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_0$ 分别是 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ 的幂零子代数, $\mathfrak{s}_0$ 可解. 且

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0\dot{+}\mathfrak{a}\dot{+}\mathfrak{n}_0.$$

(此分解称为 $\mathfrak{g}_0$ 的 **Iwasawa 分解**).

证 (1) 先证 $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{a}+\mathfrak{n}_0$ 可解.

若 α, $\beta\in P_+$, 且 $\alpha+\beta\in\Delta$, 则 $\alpha+\beta\in P_+$. 故 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数. 又 $\sigma\mathfrak{n}=\mathfrak{n}$, 故 $\mathfrak{n}_0^C=\mathfrak{n}$. 因而 $\mathfrak{n}_0$ 也是 $\mathfrak{g}_0$ 的幂零子代数. 由 $[\mathfrak{a}+\mathfrak{n}_0,\ \mathfrak{a}+\mathfrak{n}_0]\subseteq\mathfrak{n}_0$. 故 $\mathfrak{s}_0$ 可解.

(2) 再证 $\mathfrak{k}_0+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}_0=\mathfrak{k}_0\dot{+}\mathfrak{a}\dot{+}\mathfrak{n}_0$.

设 $T\in\mathfrak{k}_0$, $H\in\mathfrak{a}$, $X\in\mathfrak{n}_0$, 且 $T+H+X=0$. 以 θ 作用之得 $T-H+\theta(X)=0$, 故 $2H+X-\theta(X)=0$. 因 $\alpha\in P_+$, 故 $-\theta(\alpha)\in P_+$. 因而 $y\in\mathfrak{g}^\alpha$, 进而 $\theta(y)\in\mathfrak{g}^{\theta(\alpha)}=\mathfrak{g}^{-\alpha'}$, $\alpha'\in P_+$. 故 $\theta(X)\in\sum_{\alpha\in P_+}\mathfrak{g}^{-\alpha}$. 故 $X-\theta(X)\in\sum_{\alpha\in P_+}(\mathfrak{g}^\alpha+\mathfrak{g}^{-\alpha})$. 又 $\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}^\alpha$ 是直和, 故得 $H=X=\theta(X)=0$, 故 $T=0$. 因而 (2) 成立.

(3) 最后证 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}_0$.

若 $x\in\mathfrak{g}_0$, 则 $\sigma(x)=x$. 故 $x=\frac{1}{2}(x+\sigma(x))$. 因而有

$$x = H+\sum_{\alpha\in\Delta}(x_\alpha+\sigma x_\alpha),$$

其中 $H\in\mathfrak{h}_0$, $x_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha$. $x_\alpha+\sigma x_\alpha$ 有如下四种可能:

(a) $\alpha\in P_-$, 由引理 6 知 $\mathfrak{g}^\alpha+\mathfrak{g}^{-\alpha}\subseteq\mathfrak{k}$, $\sigma(\alpha)=-\alpha$. 故 $x_\alpha+\sigma x_\alpha\in\mathfrak{k}_0$.

(b) $-\alpha\in P_-$. 则 $x_\alpha+\sigma x_\alpha=x_{-(-\alpha)}+\sigma x_{-(-\alpha)}\in\mathfrak{g}^{-(-\alpha)}+\mathfrak{g}^{-\sigma(-\alpha)}=\mathfrak{g}^{-(-\alpha)}+\mathfrak{g}^{-\alpha}\subseteq\mathfrak{k}$. 故 $x_\alpha+\sigma x_\alpha\in\mathfrak{k}_0$.

(c) $\alpha \in P_+$, $\sigma(\alpha) \in P_+$. $x_\alpha + \sigma x_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{\sigma(\alpha)} \subseteq \mathfrak{n}$. 故 $x_\alpha + \sigma x_\alpha \in \mathfrak{n}_0$.

(d) $-\alpha \in P_+$, 则 $\tau(x_\alpha + \sigma x_\alpha) \in \mathfrak{g}^{\tau(\alpha)} + \mathfrak{g}^{\theta(\alpha)}$. 由 $\tau(\alpha)$, $\theta(\alpha) \in P_+$ (引理 5), 知 $\tau(x_\alpha + \sigma x_\alpha) \in \mathfrak{n}_0$, 而

$$x_\alpha + \sigma x_\alpha = [(x_\alpha + \sigma x_\alpha) + \tau(x_\alpha + \sigma x_\alpha)] - \tau(x_\alpha + \sigma x_\alpha),$$

而 $x_\alpha + \sigma x_\alpha \in \mathfrak{g}_0$, $\tau\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0$, 又 $y + \tau y \in \mathfrak{u}$, 故

$$(x_\alpha + \sigma x_\alpha) + \tau(x_\alpha + \sigma x_\alpha) \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0,$$

故 $x_\alpha + \sigma x_\alpha \in \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{n}_0$. 又 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0} + \mathfrak{a}$, 故 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}_0$. □

命题 1 设 $\mathfrak{g}_0$ 如定理 1 所述, $\mathfrak{u}$ 是对应的紧半单李代数, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}_0$ 是 Iwasawa 分解, 则存在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 的一组基 (x_i) 使得 $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ 在此基下有下述性质:

(1) $\operatorname{ad}\mathfrak{u}$ 的矩阵是反 Hermite 的;

(2) $\operatorname{ad}\mathfrak{n}$ 的矩阵是严格下三角的;

(3) $\operatorname{ad}\mathfrak{a}$ 的矩阵是实对角矩阵.

证 设 τ 是 $\mathfrak{u}$ 决定的共轭, 则

$$H(x, y) = -(x, \tau y)$$

是正定 Hermite 型. 又 $u \in \mathfrak{u}$ 当且仅当 $\tau u = u$.

$$\begin{aligned} H(\operatorname{ad} u(x), y) &= -([u, x], \tau y) = (x, \tau[u, y]) \\ &= -H(x, \operatorname{ad} u(y)). \end{aligned}$$

故 $\operatorname{ad} u$ 对关于 $H(x, y)$ 的标准正交基为反 Hermite 矩阵.

设 $\Delta^+ = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots\}$. 在 $\mathfrak{h}$ 中选取 $H_1, \ldots, H_l$ 使得 $H(H_i, H_j) = \delta_{ij}$. 因 $\tau\alpha = -\alpha$, $\tau\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}^{-\alpha}$, 故可取 $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$ 使得 $H(X_{\alpha_i}, X_{\alpha_i}) = -(X_{\alpha_i}, \tau X_{\alpha_i}) = 1$. 故

$$\ldots, \tau X_{\alpha_2}, \tau X_{\alpha_1}, H_1, \ldots, H_l, X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots$$

对于 $H(x, y)$ 构成一组标准正交基.

因 $\mathfrak{n}=\sum\limits_{\alpha\in P_+}\mathfrak{g}^{\alpha}$, 故 $\operatorname{ad}\mathfrak{n}$ 为严格下三角矩阵. 又 $[H_i, \tau X_{\alpha_j}]=-\alpha_j(H_i)\tau X_{\alpha_j}$, $[H_i, H_j]=0$, $[H_i, X_{\alpha_j}]=\alpha_j(H_i)X_{\alpha_j}$. 故对 $H\in\mathfrak{a}$, $\operatorname{ad}H$ 为实对角矩阵. □

2.9 T - 正常 Cartan 子代数

定义 1 一个李代数 $\mathfrak{g}$ 称为 **约化李代数**, 如果 $\mathfrak{g}=\mathfrak{c}+\mathfrak{g}_1$ 其中 $\mathfrak{c}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心, $\mathfrak{g}_1=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大半单理想.

约化李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}=\mathfrak{c}+\mathfrak{h}_1$, 其中 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数. 显然 $\mathfrak{h}$ 满足: 1. 最大可换; 2. $\forall H\in\mathfrak{h}$, $\operatorname{ad}H$ 半单.

任何紧致李代数 $\mathfrak{u}$ 自然是约化李代数.

定义 2 设 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ 是实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 分解. 称特征子代数 $\mathfrak{k}_0$ 的一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的 **环面 Cartan 子代数**. 若 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0\supseteq\mathfrak{b}$, 则称 $\mathfrak{h}_0$ 为 **T - 正常 Cartan 子代数**, 也称 **最大紧 Cartan 子代数**.

命题 1 设 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ 是一个 Cartan 分解, $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{k}_0$ 的 Cartan 子代数, 则 $\mathfrak{g}_0$ 中包含 $\mathfrak{b}$ 的最大可换子代数 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 子代数. 且 $\mathfrak{h}_0^+=\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}_0^-\subset\mathfrak{p}_0$, 即 $\mathfrak{h}_0$ 是正规分解的.

证 首先证 $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{k}_0+\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{p}_0$. 这只需证 $\tau\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_0$ 即可. 其中 τ 是对应于 $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}_0+i\mathfrak{p}_0$ 的共轭. $\forall x\in\mathfrak{h}_0$, 有 $x+\tau x\in\mathfrak{k}_0$. $\forall y\in\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{k}_0$ 有 $y=\tau y$. 因而有

$$[x+\tau x, y]=[x, y]+[\tau x, \tau y]=0.$$

故 $x+\tau x\in\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{h}_0$. 故 $\tau x\in\mathfrak{h}_0$. 因而

$$\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{k}_0+\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{p}_0,\ \text{且}\ \mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{k}_0=\mathfrak{b}.$$

再证 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. 只需证 $H\in\mathfrak{h}_0$, $\operatorname{ad}H$ 半单即可. 因 $H=H_1+H_2$, $H_1\in\mathfrak{b}\subset\mathfrak{k}_0$, $H_2\in\mathfrak{p}_0\subseteq i\mathfrak{u}$. 故 $\operatorname{ad}H_1, \operatorname{ad}H_2$ 半单. 又 $[H_1,\ H_2]=0$. 故 $\operatorname{ad}H$ 半单.

由 2.4 的引理 2 可以知道 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0^C$ 之幂等 $\mathfrak{h}_R=i\mathfrak{b}+\mathfrak{h}_0^-$, $\mathfrak{h}_0^-=\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{p}_0$. □

定义 3 设 Δ 是 $\mathfrak{h}_R$ 中的根系, 对 $\alpha\in\Delta$, 有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1\in i\mathfrak{b}$, $\alpha_2\in\mathfrak{h}_0^-$. $\mathfrak{h}_R$ 中的次序称为对 $\mathfrak{b}$ **可容许的**, 如果从 $\alpha>0$ 可推出 $\alpha_1\geq 0$.

以下均对 $\mathfrak{b}$ 可容许的次序来讨论. Δ, Δ^+, Π 分别表示根系, 正根系, 素根系. σ, τ 分别为对应 $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}_0+i\mathfrak{p}_0$ 的共轭. $\theta=\sigma\tau$.

引理 1 如果 $\alpha\in\Delta^+$, 则 $\alpha_1>0$, 且 $\theta(\Pi)=\Pi$.

证 设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. $\alpha_1\in i\mathfrak{b}$, $\alpha_2\in\mathfrak{h}_0^-$. $\alpha\in\Delta^+$. 根据 2.4 的引理 3 有 $\theta(\alpha)=\alpha_1-\alpha_2$. 若 $\theta(\alpha)=\alpha$, 则 $\alpha_2=0$. 故 $\alpha_1\neq 0$, 因而 $\alpha=\alpha_1>0$. 若 $\theta(\alpha)\neq\alpha$, 则 $\forall H\in\mathfrak{b}$, $\alpha_2(H)=(\alpha_2,\ H)=0$. 任取 $0\neq x_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha$, $0\neq\theta(x_\alpha)\in\mathfrak{g}^{\theta\alpha}$, 则 $0\neq f_\alpha=x_\alpha+\theta(x_\alpha)\in\mathfrak{k}^C$, $f_\alpha\notin\mathfrak{h}$. 但 $\forall H\in\mathfrak{b}^C$, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}H(f_\alpha)\ &=\alpha(H)x_\alpha+\theta(\alpha)(H)\theta(x_\alpha)\\ &=\alpha_1(H)f_\alpha.\end{aligned}$$

若 $\alpha_1(H)=0$, 则 $[f_\alpha,\ \mathfrak{b}^C]=0$, 则 $f_\alpha\in\mathfrak{h}$, 矛盾. 故 $\alpha_1(H)\neq 0$, 即 $\alpha_1\neq 0$. 故 $\alpha_1>0$, 且 $\theta(\Delta^+)=\Delta^+$. 设 $\alpha\in\Pi$, 若 $\theta(\alpha)=\alpha'+\alpha''$, $\alpha',\alpha''\in\Delta^+$, 则 $\alpha=\theta^2(\alpha)=\theta(\alpha')+\theta(\alpha'')$, $\theta(\alpha'),\theta(\alpha'')\in\Delta^+$, 矛盾. 故 $\theta(\Pi)=\Pi$. □

我们回忆，复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个元素 x 称为 $\mathfrak{g}$ 的一个**正规元**，如果

$$\dim \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,x} = \min_{y\in\mathfrak{g}}(\dim \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,y}),\quad \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,y} = \{z\in\mathfrak{g}|(\mathrm{ad}\,y)^k z = 0\}.$$

复半单李代数的正规元有下面的性质：

(1) 若 a 是正规元，则 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,a} = \mathfrak{z}(a) = \{x|[x,\ a] = 0\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.

(2) 若 $\mathfrak{g}$ 的二 Cartan 子代数有公共的正规元，则它们重合.

(3) 设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，Δ 为根系. $H\in\mathfrak{h}$ 满足 $\alpha(H)\neq 0, \forall\alpha\in\Delta$. 则 H 是 $\mathfrak{g}$ 的正规元.

定理 1 (1) $\mathfrak{g}_0$ 的环面 Cartan 子代数一定含有 $\mathfrak{g}$ 的一个正规元.

(2) $\mathfrak{g}_0$ 的两个 T - 正常 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}'_0$ 若包含同一环面 Cartan 子代数 $\mathfrak{b}$，则 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}'_0$.

证 (1) 首先证明 $\forall\alpha\in\Delta$ 不可能 $(\alpha,\ \mathfrak{b}) = 0$. 否则有 $(\theta(\alpha),\ \theta(\mathfrak{b})) = 0$, 即 $(\theta(\alpha),\ \mathfrak{b}) = 0$. 于是 $(\alpha+\theta(\alpha),\ \mathfrak{b}) = 0$. 又 $\alpha+\theta(\alpha)\in i\mathfrak{b}$. 故若 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1\in i\mathfrak{b}$, $\alpha_2\in\mathfrak{p}_0$, 则 $(\alpha_1,\ \mathfrak{b}) = 0$. 又 $(\alpha_1,\ \mathfrak{h}_0^-) = 0$, 故 $(\alpha_1,\ \mathfrak{h}) = 0$, 因而 $\alpha_1 = 0$, 与引理 1 矛盾. 又 Δ 是有限的. 故 $\exists H\in\mathfrak{b}$ 使得 $(H,\ \alpha)\neq 0$, $\forall\alpha\in\Delta$ 成立. 即 H 为 $\mathfrak{g}$ 的正规元.

(2) 若 $H\in\mathfrak{h}_0^+ = \mathfrak{h}_0'^+$ 为正规元，则 $\mathfrak{h}_0^C = \mathfrak{z}(H) = \mathfrak{h}_0'^C$. 故 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{z}\cap\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}'_0$. □

以下利用 T- 正常 Cartan 子代数来讨论 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$ 和 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ 中令 $\mathfrak{k}$ 不变的子群. 引进下面符号. 设 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 T - 正常 Cartan 子代数. 令

$$K = \{k\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0|k\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0\},$$

$$K_0=\{k\in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0|k\mathfrak{k}_0=\mathfrak{k}_0\},$$
$$K(\mathfrak{h}_0)=\{k\in K|k\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_0\},$$
$$K_0(\mathfrak{h}_0)=\{k\in K_0|k\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_0\}.$$

命题 2 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0\cong K(\mathfrak{h}_0)/K_0(\mathfrak{h}_0)$.

证 从 1.5 的定理 1 之系 2 知 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0\cong K/K_0$, 故只要证明 $K/K_0\cong K(\mathfrak{h}_0)/K_0(\mathfrak{h}_0)$.

$\forall k\in K$, $k(\mathfrak{h}_0)=k(\mathfrak{h}_0^+)+k(\mathfrak{h}_0^-)$ 亦为 T - 正常 Cartan 子代数. $k(\mathfrak{h}_0^+)$ 是 $\mathfrak{k}_0$ 的 Cartan 子代数. 由 $\mathfrak{k}_0$ 的 Cartan 子代数的共轭性知, 有 $\rho\in\mathrm{Ad}\,\mathfrak{k}_0$ 使得 $\rho(\mathfrak{h}_0^+)=k(\mathfrak{h}_0^+)$. ρ 可自然扩充为 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{k}_0$ 的元素. 仍记为 ρ. 即 $\rho\in K_0$. 因而 $k(\mathfrak{h}_0^+)=\rho(\mathfrak{h}_0^+)$. 于是由定理 1 知 $k(\mathfrak{h}_0)=\rho(\mathfrak{h}_0)$, 即 $\rho^{-1}k=k_1\in K(\mathfrak{h}_0)$. $k_1\to kK_0$ 是 $K(\mathfrak{h}_0)$ 到 K/K_0 的映射. 且是到上的同态. 映射的核为 $K(\mathfrak{h}_0)\cap K_0=K_0(\mathfrak{h}_0)$. 故命题 2 成立. □

定义 4 $K(\mathfrak{h}_0)$ 与 $K_0(\mathfrak{h}_0)$ 令 $\mathfrak{h}_0$ 不变. 在 $\mathfrak{h}^0$ 与 $\mathfrak{h}_R$ 诱导出等距对应. $K(\mathfrak{h}_0)$ 与 $K_0(\mathfrak{h}_0)$ 在 $\mathfrak{h}_R$ 上诱导的群 $\tilde{W}(\mathfrak{g}_0)$, $W(\mathfrak{g}_0)$ 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的 **Cartan 群** 与 **Weyl 群**.

显然 $\tilde{W}(\mathfrak{g}_0)\Delta=\Delta$, $W(\mathfrak{g}_0)\Delta=\Delta$.

2.10 复半单李代数与紧致李代数的自同构

2.10.1 复半单李代数的自同构

设 $\mathfrak{g}$ 是复半单李代数, $\mathfrak{h}$ 为其 Cartan 子代数, $\mathfrak{h}_R$ 为 $\mathfrak{h}$ 之幂等, Δ 为根系. 则 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}^{\alpha}$.

定义 1 我们称 $\{X_\alpha|X_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组 mod$\mathfrak{h}$ 的 **Weyl 基**, 如果有

(1) $[X_\alpha,X_{-\alpha}]=\alpha$, 即 $(X_\alpha,X_{-\alpha})=1$;

(2) $N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha-\beta}$, 其中 $[X_\alpha,\ X_\beta] = N_{\alpha\beta}X_{\alpha+\beta}$.

复半单李代数理论证明了下面事实:

1. $N_{\alpha\beta}$ 是实数, 且 $N_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2}(p+1)q(\alpha,\ \alpha)$, 其中

$$\beta - p\alpha,\ \ldots,\ \beta-\alpha,\ \beta,\ \beta+\alpha,\ \ldots,\ \beta+q\alpha$$

为过 β 的 α 链.

2. $\mathfrak{h}_R$ 是一个欧氏空间. $\forall\alpha\in\Delta$,

$$P_\alpha^* = \{X\in\mathfrak{h}_R|(X,\alpha)=0\}$$

是 $\mathfrak{h}_R$ 的一个超平面. Δ 是有限集. $\mathfrak{h}_R\setminus\bigcup\limits_\alpha P_\alpha^*$ 分解成有限个连通集. 每个连通集叫做一个 **Weyl 房**.

3. 对每个 $\rho\in K(\mathfrak{h}) = \{\rho\in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}|\rho(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}\}$ 有下面性质:

(1) $\rho(\mathfrak{h}_R)=\mathfrak{h}_R$, $\rho|_{\mathfrak{h}_R}$ 是等距变换;

(2) $\rho(\Delta)=\Delta$;

(3) $\rho X_\alpha = \gamma_\alpha X_{\rho(\alpha)}$, 反过来, 有下面的基本定理.

基本定理 若 ρ 是 $\mathfrak{h}_R$ 的一个等距对应, 且 $\rho(\Delta)=\Delta$. 则 ρ 可以扩充为 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构, 仍以 ρ 表示之. 则 $\rho\in K(\mathfrak{h})$, 而且为

$$\rho(X_\alpha)=\gamma_\alpha X_{\rho(\alpha)},\ \alpha\in\Pi$$

中 γ_α ($\alpha\in\Pi$) 所唯一决定.

4. 对于 $\mathfrak{g}$ 的 mod$\mathfrak{h}$ 的 Weyl 基 $\{X_\alpha\}$, 对 $\rho\in K(\mathfrak{h})$ 则有

(1) $\gamma_\alpha\gamma_{-\alpha}=1$, $\forall\alpha\in\Delta$;

(2) $\gamma_\alpha\gamma_\beta=\pm\gamma_{\alpha+\beta}$, 若 $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in\Delta$.

5. 设 $\Pi=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r)$ 为 Δ 的一组基础根系, 则 $P=\{\xi|(\xi,\alpha_i)<0\}$ 是 $P_{\alpha_i}^*$ 围成的 Weyl 房.

定义 2 P 为一固定的 Weyl 房. $\{X_\alpha\}$ 为 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{h}$ 的 Weyl 基. 若 $\rho \in K(\mathfrak{h})$ 满足 $\rho P = P$; $\rho X_{\pm\alpha} = X_{\pm\rho(\alpha)}$, $\alpha \in \Pi$, 则称 ρ 为 **正则自同构**.

ρ 是正则自同构当且仅当

$$\rho X_{\pm\alpha} = X_{\pm\rho(\alpha)}, \quad \alpha \in \Pi,$$

和

$$\rho(\Pi) = \Pi.$$

2.10.2 紧致半单李代数的自同构

设 $\mathfrak{u}$ 是紧致半单李代数. $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^C$, $\mathfrak{h}'$ 为 $\mathfrak{u}$ 的一个 Cartan 子代数, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'^C$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 于是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}^\alpha$, Δ 为 $\mathfrak{h}_R$ 的根系.

定义 3 如果 $\{X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha\}$ 满足

(1) $\{X_\alpha\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{h}$ 的 Weyl 基;

(2) $i(X_\alpha + X_{-\alpha}), X_\alpha - X_{-\alpha} \in \mathfrak{u}$,

则称 $\{X_\alpha\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组 $\mathrm{mod}\mathfrak{h}'$ **的标准 Weyl 基**.

命题 1 $\mathfrak{u}$ 紧致半单李代数. $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^C$ 的 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{h}'$ 的标准 Weyl 基一定存在.

证 设 τ 为 $\mathfrak{u}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中决定的共轭, 则对 $\forall\alpha \in \Delta$, 有 $\tau\alpha = -\alpha$. $\forall y_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ 有 $[H, \tau y_\alpha] = \tau(\alpha(\tau H)y_\alpha) = \tau(-\overline{\alpha(H)}y_\alpha) = -\alpha(H)\tau y_\alpha$. 故 $\tau y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

任取一组 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{h}$ 的 Weyl 基 $\{X'_\alpha\}$, 即有

(1) $[X'_\alpha, X'_{-\alpha}] = \alpha$, 故 $(X'_\alpha, X'_{-\alpha}) = 1$;

(2) $N'_{\alpha\,\beta} = -N'_{-\alpha\,-\beta}$, 其中 $[X'_\alpha, X'_\beta] = N'_{\alpha\,\beta}X'_{\alpha+\beta}$, $N'_{\alpha\beta}$ 为实数.

$H(x, y) = -(x, \tau y)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的正定 Hermite 型. 设

$$\tau X'_\alpha = k X'_{-\alpha}.$$

又 $0 < H(X'_\alpha, X'_\alpha) = -(X'_\alpha, \tau X'_\alpha) = -k(X'_\alpha, X'_{-\alpha}) = -k$. 故 k 为实数, 且

$$\begin{aligned} k &= -H(X'_\alpha, X'_\alpha) < 0, \\ \tau X'_\alpha &= -H(X'_\alpha, X'_\alpha) X'_{-\alpha}, \\ \tau X'_{-\alpha} &= -\frac{1}{H(X'_\alpha, X'_\alpha)} X'_\alpha = -H(X'_{-\alpha}, X'_{-\alpha}) X'_\alpha. \end{aligned}$$

故 $H(X'_\alpha, X'_\alpha) H(X'_{-\alpha}, X'_{-\alpha}) = 1$.

若 $H(X'_\alpha, X'_\alpha) = 1$, 则 $H(X'_{-\alpha}, X'_{-\alpha}) = 1$. 此时有

$$\tau X'_\alpha = -X'_{-\alpha},$$

于是 $i(X'_\alpha + X'_{-\alpha}) = i(X'_\alpha - \tau X'_\alpha) \in \mathfrak{u}$, $X'_\alpha - X'_{-\alpha} = X'_\alpha + \tau X'_\alpha \in \mathfrak{u}$. 故 $\{X'_\alpha\}$ 即为 $\mathfrak{g}$ 的一组 $\bmod \mathfrak{h}'$ 的标准 Weyl 基.

若 $H(X'_\alpha, X'_\alpha) \neq 1$. 令 $|X'_\alpha| = \sqrt{H(X'_\alpha, X'_\alpha)}$, 再令

$$X_\alpha = \frac{X'_\alpha}{|X'_\alpha|}, \quad X_{-\alpha} = \frac{X'_{-\alpha}}{|X'_{-\alpha}|} = |X'_\alpha| X'_{-\alpha}.$$

于是有 $H(X_\alpha, X_\alpha) = 1$. 故 $\tau X_\alpha = -X_{-\alpha}$, $(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$, $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \alpha$, $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta}$, 其中

$$N_{\alpha\beta} = \frac{|X'_\alpha||X'_\beta|}{|X'_{\alpha+\beta}|} N'_{\alpha\beta}$$

亦为实数. 又

$$\tau[X_\alpha, X_\beta] = \tau(N_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta}) = N_{\alpha\beta} \tau X_{\alpha+\beta},$$

$$[\tau X_\alpha,\ \tau X_\beta] = N_{-\alpha-\beta}X_{-\alpha-\beta} = N_{\alpha\beta}X_{-\alpha-\beta}.$$

因而 $\{X_\alpha\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{h}'$ 的标准 Weyl 基. □

引理 1 $\rho\in K(\mathfrak{h})$, $\rho(X_\alpha)=\gamma_\alpha X_{\rho(\alpha)}$, 则 $\rho(\mathfrak{u})=\mathfrak{u}$ 的充要条件是 $|\gamma_\alpha|=1$.

证 因 $\rho(\mathfrak{u})=\mathfrak{u}$ 的充要条件是 $\rho\tau=\tau\rho$. 现设 $\{X_\alpha\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{h}'$ 的标准 Weyl 基, 我们有

$$\begin{aligned}\tau\rho X_\alpha &= \tau(\gamma_\alpha X_{\rho(\alpha)}) = -\overline{\gamma_\alpha}X_{-\rho(\alpha)},\\ \rho\tau X_\alpha &= \rho(-X_{-\alpha}) = -\gamma_\alpha X_{-\rho(\alpha)}.\end{aligned}$$

故 $\rho\tau=\tau\rho$ 之充要条件是 $\gamma_{-\alpha}=\overline{\gamma_\alpha}$. 但是由于 $\gamma_\alpha\gamma_{-\alpha}=1$, 故知引理 1 成立. □

命题 2 对任一 $\rho\in K(\mathfrak{h})$, $\exists\rho'\in K(\mathfrak{h})$ 使得 $\rho'(\mathfrak{u})=\mathfrak{u}$. 且

$$\rho'|_{\mathfrak{h}_R}=\rho|_{\mathfrak{h}_R}$$

对 $\mathfrak{g}$ 的一组 $\mathrm{mod}\mathfrak{h}'$ 的 Weyl 基 $\{X_\alpha\}$ 有

$$\rho' X_\alpha = X_{\rho(\alpha)},\ \alpha\in\Pi.$$

证 设 Π 为基础根系, 对 $\alpha\in\Pi$ 可取 $H\in\mathfrak{h}$ 使得 $\gamma_\alpha = e^{(H,\ \alpha)}$. 于是有 $e^{\mathrm{ad}\,H}X_\alpha = e^{(H,\ \alpha)}X_\alpha=\gamma_\alpha X_\alpha$. 而 $e^{\mathrm{ad}\,H}|_{\mathfrak{h}}=I$. 故 $\rho'=\rho e^{-\mathrm{ad}\,H}$ 满足 $\rho'|_{\mathfrak{h}_R}=\rho|_{\mathfrak{h}_R}$. 而 $\rho' X_\alpha = \rho\gamma_{-\alpha}X_\alpha = \gamma_{-\alpha}\gamma_\alpha X_{\rho(\alpha)} = X_{\rho(\alpha)} = X_{\rho'(\alpha)}$. 于是由 $\gamma_{\alpha_{\rho'}}=1$ 得

$$\gamma_{\alpha+\beta_{\rho'}} = \pm\gamma_{\alpha_{\rho'}}\gamma_{\beta_{\rho'}} = \pm 1.$$

故对 $\alpha\in\Delta$, $\rho' X_\alpha = \pm X_{\rho'(\alpha)}$. 故 $\rho'(\mathfrak{u})=\mathfrak{u}$. □

系 设 $\mathfrak{u}$ 是紧致半单李代数. $\mathfrak{h}'$ 为其 Cartan 子代数. $i\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}_R$ 为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{u}^C$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'^C$ 的幂等. ρ 是 $\mathfrak{h}_R$ 的等距变换, 且 $\rho(\Delta)=\Delta$. 则 ρ 可扩充为 $\mathfrak{u}$ 的自同构.

证 首先可将 ρ 扩充为 $\mathfrak{g}$ 上自同构 ρ_1. 由此知 $\rho_1 \in K(\mathfrak{h})$. 故有 $\rho_1'(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$, 即 $\rho_1' \in \operatorname{Aut}\mathfrak{u}$. $\rho_1'|_{\mathfrak{h}_R} = \rho_1|_{\mathfrak{h}_R} = \rho$. 故 ρ 可扩充为 $\mathfrak{u}$ 的自同构. □

$\mathfrak{h}_R$ 的一个令根系不变的等距对应, 可扩充为 $\mathfrak{u}$ 的自同构. 但扩充并不是唯一的. 若 ρ_1, ρ_2 均为 ρ 的扩充, 则 $\phi = \rho_1\rho_2^{-1}|_{\mathfrak{h}_R} = I$. 因此为研究不同扩充的关系, 应考虑 $\rho \in \operatorname{Aut}\mathfrak{u}$, 而 $\rho|_{\mathfrak{h}_R} = I$ 的情况. 为此先给出一般半单李代数的情况.

引理 2 设 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 分解. $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{b} + \mathfrak{h}_0^-$ 是有正规分解的 T - 正常 Cartan 子代数. 令

$$
\begin{aligned}
&K = \{t \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0 | t\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0\},\\
&K(\mathfrak{h}_0) = \{k \in K | k(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0\},\\
&K_0(\mathfrak{h}_0) = K(\mathfrak{h}_0) \cap \operatorname{Ad}\mathfrak{g}_0,\\
&R_0 = \{\rho \in K(\mathfrak{h}_0) | \rho|_{\mathfrak{h}_0} = I\}.
\end{aligned}
$$

则 $\forall \rho \in R_0$ 有 $\rho = e^{\operatorname{ad} H}$, $H \in \mathfrak{b}$. 进而 $R_0 \subseteq K_0(\mathfrak{h}_0)$.

证 设 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ 在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 中决定的共轭分别为 σ, τ. 令 $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$. 对 $\mathfrak{h}_R$ 的根系 Δ, 引入对 $\mathfrak{b}$ 容许的次序, 则有一素根系 Π 使得 $\theta(\Pi) = \Pi$, $\theta(X_\alpha) = t_\alpha X_{\theta(\alpha)}$, $t_\alpha \neq 0$.

若 $\rho \in R_0$, 即 $\rho|_{\mathfrak{h}_0} = I$, 故 $\rho|_{\mathfrak{h}} = I$, 故 $\rho(\alpha) = \alpha$. 故可假定 $\rho(X_\alpha) = \gamma_\alpha X_\alpha$.

由 $\rho\theta = \theta\rho$, 有 $\gamma_\alpha t_\alpha X_{\theta(\alpha)} = t_\alpha \gamma_{\theta(\alpha)} X_{\theta(\alpha)}$, 故 $\gamma_\alpha = \gamma_{\theta(\alpha)}$. 又由于 $\theta(\Pi) = \Pi$, 可取 $H \in \mathfrak{h}$ 使得 $e^{(H,\ \alpha_i)} = \gamma_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \Pi$. 由于 $\gamma_\alpha = \gamma_{\theta(\alpha)}$, 故有

$$
(H,\ \alpha_i) = (H,\ \theta(\alpha_i)),
$$

又 $(H,\ \alpha_i) = (\theta(H),\ \theta(\alpha_i))$. 因而

$$
(H - \theta(H),\ \theta(\alpha_i)) = 0,\ \alpha_i \in \mathfrak{k}.
$$

故 $H-\theta(H)=0$, 故 $H\in\mathfrak{b}^C$.

作 $e^{\mathrm{ad}\,H}$, 则 $e^{\mathrm{ad}\,H}|_{\mathfrak{h}}=I$, $e^{\mathrm{ad}\,H}X_\alpha=\gamma_\alpha X_\alpha=\rho(X_\alpha)$, $\alpha\in\Pi$. 故知 $\rho=e^{\mathrm{ad}\,H}$. 由 $\rho\in K$, K 紧致, $\mathrm{ad}\,H$ 的特征值纯虚, 即 $(H,\ \alpha)i$ 是实数, $\alpha\in\Delta$. 即 $iH\in\mathfrak{h}_R=i\mathfrak{b}+\mathfrak{h}_0^-$. 又 $H\in\mathfrak{b}^C$, 故 $H\in\mathfrak{b}$. 故

$$\rho=e^{\mathrm{ad}\,H}\in K_0(\mathfrak{h}_0). \qquad \square$$

系 如果 $\mathfrak{u}$ 是紧致半单李代数. $\mathfrak{h}'$ 为其 Cartan 子代数. $\rho\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$, 且 $\rho|_{\mathfrak{h}'}=I$. 则 $\rho=e^{\mathrm{ad}\,H}$, $H\in\mathfrak{h}'$. $\square$

2.10.3 小结

设 $\mathfrak{u}$ 紧致半单李代数, $\mathfrak{h}'$ 为其 Cartan 子代数, $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'^C$, $\mathfrak{h}_R=i\mathfrak{h}'$, Δ 为根系. $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}^\alpha$, $\{X_\alpha\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{h}'$ 的标准 Weyl 基. Π 为一组基础根系.

$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}\subset\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$. $K(\mathfrak{h}')$, $K(\mathfrak{h})$ 分别表示它们的令 $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}$ (因而 $\mathfrak{h}_R$) 不变的子群. 设 Φ 为 $\mathfrak{h}_R$ 上所有转动 (即 $\mathfrak{h}_R$ 上等距的且使 Δ 不变的变换) 构成的群 (称为 **Cartan 群**), 则 $\forall\rho\in K(\mathfrak{h}')$, 映射

$$\rho\longrightarrow\rho|_{\mathfrak{h}_R}$$

是 $K(\mathfrak{h}')$ 到 Φ 上的同态映射. 其核为 $R_0=\{\rho\in K(\mathfrak{h}')|\rho|_{\mathfrak{h}'}=I\}$. 故

$$K(\mathfrak{h}')=\bigcup_{\rho'}\rho' R_0,$$

其中 ρ' 可选取为满足 $\rho'(X_{\pm\alpha})=X_{\pm\rho(\alpha)}$, $\forall\alpha\in\Pi$,

$$R_0=\{e^{\mathrm{ad}\,H}|H\in\mathfrak{h}'\}\subseteq K_0(\mathfrak{h}_0).$$

即 $\rho \in K(\mathfrak{h}')$, $\exists \rho', H \in \mathfrak{h}'$. $\rho' X_{\pm\alpha} = X_{\pm\rho'(\alpha)} = X_{\pm\rho(\alpha)}$, $\alpha \in \Pi$ 使得

$$\rho = \rho' e^{\operatorname{ad} H}.$$

由于 $\operatorname{Aut}\mathrm{u}/\operatorname{Ad}\mathrm{u} \cong K(\mathfrak{h}_0)/K_0(\mathfrak{h}_0)$, 而 $K(\mathfrak{h}_0)$ 与 Φ 同态, $K_0(\mathfrak{h}_0)$ 与 Weyl 群 S 同态. 同态核 $R_0 \subset K_0(\mathfrak{h}_0)$. 故

$$K(\mathfrak{h}_0)/K_0(\mathfrak{h}_0) \cong (K(\mathfrak{h}_0)/R_0)/(K(\mathfrak{h}_0)/R_0) \cong \Phi/S,$$

即 $\operatorname{Aut}\mathrm{u}/\operatorname{Ad}\mathrm{u} \cong \Phi/S$. 而 S 是 $\{\sigma_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ 所生成. 若 P 为任一固定的 Weyl 房. 再令 $\Phi_1 = \{\phi \in \Phi | \phi P = P\}$. 则有 $\Phi_1 \cap S = \{e\}$. 即 $s \in S$, $sP = P$, 故 $s = e$. 因而有

$$\operatorname{Aut}\mathrm{u}/\operatorname{Ad}\mathrm{u} \cong \Phi_1.$$

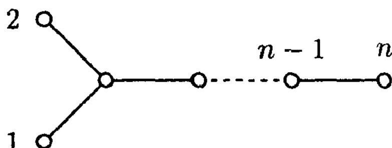
由于 Φ_1 保持 $\mathfrak{h}_R$ 的内积, 且使 P 即 Π 不变. 故对于单李代数是完全确定的:

B_n, C_n, G_2, F_4, E_7, E_8 : $\Phi_1 = \{I\}$.

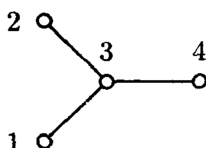
A_n : $\Phi_1 = \{I, (1,n)(2,n-1)\cdots\}$.



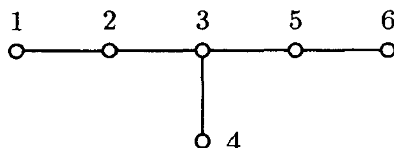
$D_n, n > 4 : \Phi_1 = \{e, (1,2)\}$.



$D_4: \ \Phi_1 = \{e, (1,2), (2,4), (1,4), (1,2,4), (1,4,2)\}.$



$E_6: \ \Phi_1 = \{e, (1,6)(2,5)\}.$



由 $\mathrm{Aut\,u}/\mathrm{Ad\,u} \cong \Phi_1$ 还可得下面定理.

定理 1 $\mathrm{Aut\,u} = \mathfrak{D} \cdot \mathrm{Ad\,u}$ 为半直积, 其中 $\mathfrak{D}$ 是正则自同构.

即 $\mathrm{Aut\,u}$ 中任一连通分支必有一正则自同构 t_0. 特别对于单位连通分支 $\mathrm{Ad\,u}$, $t_0 = I$.

第三章　实半单李代数的分类

3.11　Gantmacher 定理

3.11.1　实半单李代数与紧致半单李代数的对合自同构的关系

设 $\mathfrak{g}_0$ 是实半单李代数. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是其 Cartan 分解. 则 $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ 是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 的紧致实形式. 设 σ, τ 分别为 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{u}$ 所决定的共轭. 则 $\sigma(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$. 即 σ 在 $\mathfrak{u}$ 上的限制是 $\mathfrak{u}$ 的一个对合自同构. 反过来, 我们有下面的结果.

命题 1　设 $\mathfrak{u}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个紧致实形式. ϕ 是 $\mathfrak{u}$ 的一个对合自同构. $\mathfrak{u}$ 对 ϕ 的分解为

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_+ \dot{+} \mathfrak{u}_-, \quad \mathfrak{u}_\pm = \{X \in \mathfrak{u} | \phi(X) = \pm X\}.$$

则 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_+ + i\mathfrak{u}_-$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个实形式. 且 $\mathfrak{g}_0$ 对应的共轭 σ 满足 $\sigma|_\mathfrak{u} = \phi$.

证　显然有

$$[\mathfrak{u}_+, \mathfrak{u}_+] \subseteq \mathfrak{u}_+, \ [\mathfrak{u}_-, \mathfrak{u}_-] \subseteq \mathfrak{u}_+, \ [\mathfrak{u}_+, \mathfrak{u}_-] \subseteq \mathfrak{u}_-.$$

故

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{g}_0,$$

$\mathfrak{g}_0$ 为实李代数. 又

$$\mathfrak{g}_0 + i\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_+ + i\mathfrak{u}_- + i(\mathfrak{u}_+ + i\mathfrak{u}_-) = \mathfrak{g},$$

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}_0 = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{u} = \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{g}.$$

又 $\forall u \in \mathfrak{u}, u = u_+ + u_-, u_\pm \in \mathfrak{u}_\pm$ 有

$$\sigma(u) = \sigma(u_+ + u_-) = \sigma(u_+ - i(iu_-)) = u_+ - u_- = \phi(u). \quad \square$$

由于 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形是共轭的, 故实半单李代数的分类问题就化为 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形的对合自同构的分类问题.

定义 1 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形 $\mathfrak{u}$ 的两个对合自同构 θ, θ' 称为 **共轭的**, 如果存在一个 $\gamma \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 使得 $\gamma\theta\gamma^{-1} = \theta'$.

$\mathfrak{g}$ 的两个实形式 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0'$ 称为 **共轭的**, 若有 $\gamma \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 使得 $\gamma\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0'$.

定理 1 设 θ, θ' 是 $\mathfrak{u}$ 的两个对合自同构, 则它们对应的实李代数 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0'$ 在 $\mathfrak{g}$ 内共轭的充分必要条件是 θ 与 θ' 共轭.

证 设 σ, σ' 分别为 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0'$ 所决定的共轭. 则 $\sigma|_{\mathfrak{u}} = \theta$, $\sigma'|_{\mathfrak{u}} = \theta'$. 且 $\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} | \sigma x = x\}$, $\mathfrak{g}_0' = \{x \in \mathfrak{g} | \sigma' x = x\}$.

又据 1.2 的定理 1, $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 与 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^R = \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 中以 $\mathrm{ad}\mathfrak{u} \cong \mathfrak{u}$ 为李代数的闭子群 G_0 同构. 因而 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 可嵌入 $\mathrm{Ad}\mathfrak{g}$ 中. 故 $\gamma \in \mathrm{Ad}\mathfrak{u}$ 可扩充为 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 的元素. 若 θ 与 θ' 共轭, 即有 $\gamma \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u} \subseteq \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 使得 $\gamma\theta\gamma^{-1} = \theta'$. 对任一 $x = x_1 + ix_2$, x_1, $x_2 \in \mathfrak{u}$ 且 $\theta x_1 = x_1$, $\theta x_2 = -x_2$. 由 $\gamma\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ 知 γx_1, $\gamma x_2 \in \mathfrak{u}$. 又若 σ' 为 $\mathfrak{g}_0'$ 对应的共轭, 则 $\sigma'|\mathfrak{u} = \theta'$. 故有

$$\sigma'(\gamma x) \quad = \sigma'(\gamma x_1) - i\sigma'(\gamma x_2) = \theta'(\gamma x_1) - i\theta'(\gamma x_2)$$

$$= \gamma\theta\gamma^{-1}(\gamma x_1) - i\gamma\theta\gamma^{-1}(\gamma x_2) = \gamma x_1 + i\gamma x_2$$
$$= \gamma x.$$

故 $\gamma\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_0'$. 又 $\dim\gamma\mathfrak{g}_0 = \dim\mathfrak{g}_0'$, 故 $\gamma\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0'$. 即 $\mathfrak{g}_0$ 与 $\mathfrak{g}_0'$ 共轭.

反之, 设 $\mathfrak{g}_0$ 与 $\mathfrak{g}_0'$ 共轭, 即有 $\gamma \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 使得 $\gamma\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0'$. 又设 σ 与 σ' 分别为 $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_0'$ 对应的共轭. 因而有 $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \sigma'$. 且 $\gamma\mathfrak{u}$ 亦为紧致实形. 故

$$\mathfrak{g}_0' = \gamma\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0' \cap \gamma\mathfrak{u} + \mathfrak{g}_0' \cap i\gamma\mathfrak{u},$$
$$\mathfrak{g}_0' = \mathfrak{g}_0' \cap \mathfrak{u} + \mathfrak{g}_0' \cap i\mathfrak{u}$$

均为 $\mathfrak{g}_0'$ 的 Cartan 分解, 由 Cartan 分解的共轭性知有 $\gamma_1 \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0' \subseteq \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 使得

$$\gamma_1(\mathfrak{g}_0' \cap \gamma\mathfrak{u}) = \mathfrak{g}_0' \cap \mathfrak{u}, \quad \gamma_1(\mathfrak{g}_0' \cap i\gamma\mathfrak{u}) = \mathfrak{g}_0' \cap i\mathfrak{u}.$$

令 $\gamma_2 = \gamma_1\gamma$ 则有 $\gamma_2\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0'$, 故 $\gamma_2\tau\gamma_2^{-1} = \sigma'$. 而且有

$$\gamma_2(\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}) = \mathfrak{g}_0' \cap \mathfrak{u}, \quad \gamma_2(\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}) = \mathfrak{g}_0' \cap i\mathfrak{u}.$$

故 $\gamma_2(i\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}) = i\mathfrak{g}_0' \cap \mathfrak{u}$. 于是

$$\begin{aligned}\gamma_2\mathfrak{u} &= \gamma_2(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_0 + i\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}) \\ &= \mathfrak{g}_0' \cap \mathfrak{u} + i\mathfrak{g}_0' \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{u},\end{aligned}$$

即 $\mathfrak{u}$ 是 σ, σ' 及 γ_2 的不变子空间, 且 $\theta' = \gamma_2|_{\mathfrak{u}} \cdot \theta \cdot \gamma_2^{-1}|_{\mathfrak{u}}$, $\gamma_2|_{\mathfrak{u}} = \gamma' \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$. 故 σ 与 σ' 共轭. □

从上面定理知以 $\mathfrak{g}$ 为复化的实李代数的分类问题就变成了 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形的对合自同构的共轭分类的问题.

3.11.2 Gantmacher 定理

设 $\mathfrak{u}$ 是紧致半单李代数，$\mathfrak{g}=\mathfrak{u}^C$. θ 是 $\mathfrak{u}$ 的一个对合自同构. $\mathfrak{g}_0$ 是对应的实半单李代数. 则 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ ($\mathfrak{k}_0=\{x\in \mathfrak{u}|\theta(x)=x\}$, $i\mathfrak{p}_0=\{x\in\mathfrak{u}|\theta(x)=-x\}$) 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 分解. 设 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0+\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的对此分解有正规分解的 T - 正常 Cartan 子代数，则 $\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}_0+i\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{u}$ 的 Cartan 子代数. $\mathfrak{h}^C=\mathfrak{h}'^C$, 其幂等为 $\mathfrak{h}_R=i\mathfrak{h}_0+\mathfrak{h}_1$.

定理 2 假设如上. 则 θ 在 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 下共轭于

$$\theta_0 e^{\mathrm{ad}\,H},$$

其中 θ_0 是 $\mathfrak{u}$ 的一个正则对合自同构，$H\in\mathfrak{h}_0=\{H_1\in\mathfrak{h}'|\theta_0(H_1)=H_1\}$.

(此定理称为 **Gantmacher 定理**.)

证 $i\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{k}_0$ 的幂等. 对 $i\mathfrak{h}_0$ 的一个可容许次序所决定的素根系 Π, 有 $\theta(\Pi)=\Pi$ (2.5 的引理 1).

根据 2.5.3 知有 $\theta=\theta_0'e^{\mathrm{ad}\,H}$, $H\in\mathfrak{h}'$. 而且对 $\mathrm{mod}\mathfrak{h}'$ 标准 Weyl 基有

$$\theta_0'|_{\mathfrak{h}}=\theta|_{\mathfrak{h}},\ \theta_0'x_{\pm\alpha}=x_{\pm\theta(\alpha)}=x_{\pm\theta_0'(\alpha)},\ \alpha\in\Pi.$$

即对此 $\mathfrak{h}'$, Π, $\{x_\alpha\}$, θ_0' 是正则自同构.

又 $\theta_0'^2|_{\mathfrak{h}}=\theta^2|_{\mathfrak{h}}=I$, $\theta_0'^2x_\alpha=\theta_0'x_{\theta(\alpha)}=x_{\theta^2(\alpha)}=x_\alpha$. 故 $\theta_0'^2=I$, 即 θ_0' 是正则对合自同构.

若 $\theta_0'\theta=\theta\theta_0'$, 则 $e^{\mathrm{ad}\,H}=\theta\theta_0'=\theta_0'\theta$, 则 $\theta_0'e^{\mathrm{ad}\,H}\theta_0'=e^{\mathrm{ad}\,H}$, 即 $\theta_0'H=H$, 故 $H\in\mathfrak{h}'$, $\theta_0'H=H$. 即定理成立.

若 $\theta_0'\theta\neq\theta\theta_0'$. 设 $\theta x_\alpha=\gamma_\alpha x_{\theta(\alpha)}$, $\alpha\in\Pi$. 由 $|\gamma_\alpha|=1$, 可令 $\gamma_\alpha=e^{2\pi i\mu_\alpha}$, $\mu_\alpha\in\mathbf{R}$. 有 $H_1\in\mathfrak{h}'$ 使得 $(H_1,\alpha)=2\pi i\mu_\alpha$,

$\alpha \in \Pi$. 令 $\xi = e^{\frac{1}{2}\operatorname{ad} H_1}$, 则 $\xi \in K_0(\mathfrak{h}')$, $\theta' = \xi\theta\xi^{-1} \in K(\mathfrak{h}')$. 且 $\theta'|_{\mathfrak{h}^C} = \theta|_{\mathfrak{h}^C} = \theta_0'|_{\mathfrak{h}^C}$. 又

$$\begin{aligned} &\theta'(x_\alpha) = e^{\pi i(\mu_\alpha + \mu_{\theta(\alpha)})} X_{\theta(\alpha)}; \\ &\theta_0'\theta'\theta_0'(x_\alpha) = e^{i\pi(\mu_\alpha + \mu_{\theta(\alpha)})} x_{\theta(\alpha)} = \theta' x_\alpha. \end{aligned}$$

即 $\theta_0\theta' = \theta'\theta_0'$, 故 $\theta' = \theta_0' e^{\operatorname{ad} H}, H \in \mathfrak{h}'$, $\theta_0' H = H$. 而 θ 与 θ' 在 $\operatorname{Ad}\mathfrak{u}$ 下共轭. □

由 $\mathfrak{u}$ 的 Cartan 子代数的共轭性知对事先指定的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}'$, 素根系 Π, 标准 Weyl 基, θ 共轭于 $\theta_0 e^{\operatorname{ad} H}$. 其中 θ_0 是正则对合自同构; $H \in \mathfrak{h}'$, 且 $\theta_0(H) = H$.

由于 $\theta_0(\Pi) = \Pi$, 由 2.5.3 知, 在 $\mathfrak{u}$ 为单李代数时, 只有在 A_n, D_n, E_6 时, θ_0 可能不是恒等变换. 而其余情况 θ_0 必为恒等变换.

3.11.3 对 H 的进一步研究

考虑 $\mathfrak{h}'$ 到 $\operatorname{Ad}\mathfrak{u}$ 内的映射 $g: H \to e^{\operatorname{ad} H}$ $(H \in \mathfrak{h}')$. 显然这是同态映射. 由 $e^{\operatorname{ad} H} x_\alpha = e^{(\alpha,\ H)} x_\alpha$, $(\alpha \in \Delta)$ 知此同态的核为

$$\Gamma_1 = \{H \in \mathfrak{h}' | (\alpha,\ H) \equiv 0 \, (\operatorname{mod} 2\pi i), \forall \alpha \in \Delta\}.$$

这是 $\mathfrak{h}'$ 中的离散子群. $\forall H_0 \in \Gamma_1$ 定义 $\mathfrak{h}'$ 中一个平移 $\pi(H_0): H \to H + H_0$. 则 $\pi(H_0)\Gamma_1 = \Gamma_1$, $\{\pi(H_0) | H_0 \in \Gamma_1\} \cong \Gamma_1$. 将平移所成的群仍以 Γ_1 记之. 又设 S 为 Weyl 群. 由于 $S(\Delta) = \Delta$. 故 $S\Gamma_1 = \Gamma_1$, 且 $\forall s \in S$, $\pi(H_0) \in \Gamma_1$, 有 $s\pi(H_0)s^{-1}(H) = s\pi(H_0)(s^{-1}H) = s(s^{-1}H + H_0) = H + sH_0 = \pi(sH_0)H$, 即有 $s\pi(H_0)s^{-1} = \pi(sH_0)$. 显然 $S \cap \Gamma_1 = \{e\}$, 故 S 与 Γ_1 之积 $W_1 = S\Gamma_1$ 是半直积.

为进一步将 H 精确化，先证两个引理，并由此引进 Weyl 胞的概念.

引理 1 若 $\phi \in W_1$, $H \in \mathfrak{h}'$, 则 $e^{\mathrm{ad}\, H}$ 与 $e^{\mathrm{ad}\,\phi(H)}$ 共轭.

证 若 $\phi = \pi(H_0) \in \Gamma_1$, 则 $e^{\mathrm{ad}\,\phi(H)} = e^{\mathrm{ad}\,(H+H_0)} = e^{\mathrm{ad}\, H}$. 故只要对 S, 即只要对 $s_\alpha(\ \alpha \in \Delta\ )$ 来证明. 对 $\alpha \in \Delta$, 取

$$x = \frac{i\pi}{\sqrt{2(\alpha,\ \alpha)}}(x_\alpha + x_{-\alpha}).$$

由 $\{x_\alpha\}$ 是 $\mathrm{mod}\mathfrak{h}'$ 标准 Weyl 基，故 $x \in \mathfrak{u}$. 对 $H \in \mathfrak{h}'$ 有 (用归纳法不难证明):

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\, x)^{2p+1}H &= \frac{(-1)^{p+1}\pi^{2p+1}}{\sqrt{2(\alpha,\ \alpha)}}(\alpha,\ H)i(x_\alpha - x_{-\alpha}),\\ (\mathrm{ad}\, x)^{2p+2}H &= \frac{(-1)^{p+1}\pi^{2p+2}}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}(\alpha,\ H)\alpha.\end{aligned}$$

令 $\gamma = e^{\mathrm{ad}\, x}$, 则有

$$\begin{aligned}\gamma H &= e^{\mathrm{ad}\, x}H\\ &= H + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)!}(\mathrm{ad}\, x)^{2p+1}H\\ &\quad + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+2)!}(\mathrm{ad}\, x)^{2p+2}H\\ &= H - \sin\pi\cdot\frac{(\alpha,\ H)}{\sqrt{2(\alpha,\ \alpha)}}i(x_\alpha - x_{-\alpha})\\ &\quad + (\cos\pi - 1)\frac{(\alpha,\ H)}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha\\ &= H - \frac{2(H,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha = s_\alpha H.\end{aligned}$$

故 $e^{\mathrm{ad}\, s_\alpha H} = \gamma e^{\mathrm{ad}\, H}\gamma^{-1}$ 与 $e^{\mathrm{ad}\, H}$ 在 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 下共轭. □

对一个 $\alpha \in \Delta$ 及整数 n, $\{H|(H,\ \alpha) = 2n\pi i\}$ 为一个超平面. 设 W_0 为对此类超平面的反射生成的群, 则有下面的引理.

引理 2 $W_0 \subseteq W_1$. 且 $W_0 = S \cdot \Gamma_0$, 其中 Γ_0 是令 Γ_1 不变的平移.

证 只要证明 W_0 令 Γ_0 不变即可. 把对超平面 $\{H|(H,\alpha) = 2n\pi i\}$ 的反射记为 τ. 则有

$$\tau(H) = s_\alpha H + \frac{4n\pi i}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha = H - \frac{2(H,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha + \frac{4n\pi i}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha.$$

对任何 $\beta \in \Delta$, $H \in \Gamma_1$, 注意到 $\frac{2(\alpha,\ \beta)}{(\alpha,\ \alpha)}$ 是整数, 故有

$$\begin{aligned}(\tau(H),\ \beta) &= (H,\ \beta) - \frac{2(H,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}(\alpha,\ \beta) + \frac{4n\pi i}{(\alpha,\ \alpha)}(\alpha,\ \beta)\\ &\equiv 0\ (\mathrm{mod} 2\pi i).\end{aligned}$$

即 $\tau(H) \in \Gamma_1$. 故 $W_0 \subseteq W_1$, $W_0 = S \cdot \Gamma_0$. □

定义 2 $\mathfrak{h}'$ 被超平面 $\{H|(H,\alpha) = 2n\pi i\}$ (其中 $\alpha \in \Delta$, n 为整数) 分解成若干凸区域. 每个区域称为一个 **Weyl 胞**.

$\mathfrak{h}'$ 的 Weyl 胞与 W_0 有以下性质:

(1) 若 $\bar{P}$ 为一固定的 Weyl 胞, $H \in \mathfrak{h}'$, 则存在 $t \in W_0$ 使得 $t(H) \in \bar{P}$.

(2) 所有的 Weyl 胞关于 W_0 合同, 即若 $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ 是两个 Weyl 胞, 则有 $t \in W_0$ 使得 $t\bar{P}_1 = \bar{P}_2$.

(3) 单纯李代数的 Weyl 胞是一个 n 维单形. 且为

$$\bar{P} = \{x \in \mathfrak{h}'|\frac{1}{2\pi i}(\alpha_k,\ x) \geq 0,\ \frac{1}{2\pi i}(\lambda,\ x) \leq 1\},$$

其中 $\{\alpha_k\}$ 为一基础根系, $\lambda = \sum m_k\alpha_k$ 为对此基础根系的最高根 (首根).

由此知对于 $t \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$, $\exists \gamma \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 使得 $\gamma t \gamma^{-1} = e^{\mathrm{ad}\,H}$, 其中 $H \in \mathfrak{h}'$, 且 $H \in \bar{P}$.

若 θ 是 $\mathfrak{u}$ 的对合自同构. 则 $\mathfrak{k}_0 = \{x \in \mathfrak{u} | \theta(x) = x\}$ 是紧致李代数. 若 $\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{u}$ 的 Cartan 子代数. 则 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{k}_0$ 的 Cartan 子代数. 设 $\{\alpha_i'\}$ 是 $\mathfrak{h}_0$ 的素根系, λ' 为相应的最高根.

定理 3 若 θ 是 $\mathfrak{u}$ 的对合自同构, 则 θ 共轭于 $\theta_0 e^{\mathrm{ad}\,H}$, 其中 $H \in \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{h}'$, 若 $H \neq 0$, 则可取得使之满足:

$$(\alpha_1',\ H) = \pi i; \quad (\alpha_k', H) = 0,\ k > 1.$$

而且在 $\lambda' = m_1\alpha_1' + m_2\alpha_2' + \cdots$ 中 $m_1 = 1$ 或 2.

证 先假定 $\theta_0 = I$. 此时 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}'$, $\alpha_k' = \alpha_k$. 对 $H \in \mathfrak{h}'$ 使得

$$\frac{(\alpha_k,\ H)}{2\pi i} \geq 0, \quad \frac{(\lambda,\ H)}{2\pi i} \leq 1.$$

由 $\theta^2 = I$, 故得 $e^{2\mathrm{ad}\,H} = I$. 于是有

$$\frac{2(\alpha_k,\ H)}{2\pi i} \equiv 0\ (\mathrm{mod} 1).$$

因而

$$\frac{(\alpha_k,\ H)}{2\pi i} = 0 \text{ 或 } \frac{1}{2}; \quad \frac{(\lambda,\ H)}{2\pi i} \leq 1.$$

为计算简单起见, 将 $\frac{\alpha_k}{2\pi i}$ 记为 α_k. 故有下面两种情况:

(1) $(\alpha_1,\ H) = \frac{1}{2}$; $(\alpha_k,\ H) = 0$, $k > 1$. 由 $(\lambda,\ H) \leq 1$ 知 $m_1 = 1$ 或 2.

(2) $(\alpha_1,\ H) = (\alpha_2,\ H) = \frac{1}{2}$, $(\alpha_k,\ H) = 0$, $k > 2$. 由 $(\lambda,\ H) \leq 1$, 故 $m_1 = m_2 = 1$, $(\lambda,\ H) = 1$.

(1) 已合乎要求. (2) 可以取 $h \in \Gamma_1$ 满足: $(h,\ \alpha_1) = 1$; $(h,\ \alpha_k) = 0$, $k > 1$; 故 $(\lambda,\ h) = 1$. 因而 $x \in \bar{P}$. 令 $x' = x - h$

则有

$$\begin{aligned}&(-\alpha_1,\ x')=(-\alpha_1,\ x)+(\alpha_1,\ h)\le 1,\\&(-\lambda,\ x')=(-\lambda,\ x)+(\lambda,\ h)\ge 0,\\&(\alpha_k,\ x')\ge 0,\quad k>1.\end{aligned}$$

$\pi(-h)(\bar{P})$ 仍为一个 Weyl 胞, 而且含有原点. 故 $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n,$ $-\lambda$ 亦为一基础系. H 满足 (2) 则有

$$\begin{aligned}&(\alpha_2,\ H-h)=\frac{1}{2},\\&(\alpha_k,\ H-h)=0,\quad k>2,\\&(-\lambda,\ H-h)=0.\end{aligned}$$

再取 $s\in S$ 使得 $s(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)=(\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ -\lambda)$ 即可.

其次假定 $\theta_0\ne I$. 由于 $\theta_0 e^{\mathrm{ad}\,H}=e^{\mathrm{ad}\,H}\cdot\theta_0$, 故 $e^{2\mathrm{ad}\,H}=I$. 因而 $e^{\mathrm{ad}\,H}$ 亦为对合自同构. 因而有 $\gamma\in\mathrm{Ad}\,\mathfrak{k}_0$ 使得 $\gamma\theta_0 e^{\mathrm{ad}\,H}\gamma^{-1}$ $=\theta_0 e^{\mathrm{ad}\,\gamma H}$ 合于定理之条件. □

例 考虑 A_2 的情况.

$$\Pi=\{\alpha_1,\ \alpha_2\},\ \lambda=\alpha_1+\alpha_2.$$

(1) $H=\frac{1}{3}(2\alpha_1+\alpha_2),\ \frac{1}{3}(2\alpha_2+\alpha_1)$ 知 $(H,\ \alpha_2)=0$.

(2) $H=\alpha_1+\alpha_2$.

$$(\alpha_1,\ H)=(\alpha_2,\ H)\ne 0.$$

取 $h=\frac{2}{3}(2\alpha_1+\alpha_2)$. 则 $\tau\bar{P}$ 为一 Weyl 房. 对此 Weyl 房, $\{\alpha_2,\ -\lambda\}$ 构成素根系. $-\alpha_1$ 是最高根.

3.12 正则特征子代数

引理 1 设 $\mathfrak{u}_0$ 是紧致李代数 $\mathfrak{u}$ 的子代数. $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_0$ 分别是 $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}_0$ 的 Cartan 子代数. 且 $\mathfrak{h}_0 \subseteq \mathfrak{h}$. 则 $\mathfrak{u}_0$ 的根必为 $\mathfrak{u}$ 的根在 $\mathfrak{h}_0$ 上的诱导.

证 设 $\mathfrak{u}$ 的复化有分解

$$\mathfrak{u}^C = \sum_{\lambda \in \Delta \cup \{0\}} \mathfrak{u}^\lambda,$$

其中 Δ 是非零根系. 令 $\lambda' = \lambda|_{\mathfrak{h}_0}$, 即 λ 在 $\mathfrak{h}_0$ 上的诱导. 于是对 $\mathfrak{u}_0$ 的复化有根向量空间的分解 $\mathfrak{u}_0^C = \sum\limits_{\lambda'} \mathfrak{u}^{\lambda'}$.

考虑 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{u}_0$ 对商空间 $\mathfrak{u}^C/\mathfrak{u}_0^C$ 的表示 $(\rho, \mathfrak{u}^C/\mathfrak{u}_0^c)$. 可将 $\mathfrak{u}^C/\mathfrak{u}_0^C$ 分解为 $\mathfrak{u}^C/\mathfrak{u}_0^C = \sum \bar{\mathfrak{u}}^{\lambda'}$, 其中 $\bar{\mathfrak{u}}^{\lambda'}$ 是由 $\mathfrak{u}^{\lambda'}$ 的余类所成的子空间, 它是根为 λ' 的根空间, 故上式显然是直和. 如果 $x \in \mathfrak{u}_0$, 令 $x = \sum x_{\lambda'}$, 则有 $0 = \bar{x} = \sum \bar{x}_{\lambda'}$, $\bar{x}_{\lambda'} \in \mathfrak{u}^{\lambda'}$. 于是所有 $\bar{x}_{\lambda'} = 0$, 即 $x \in \mathfrak{u}_0^C$. 所以 $x_{\lambda'} \in \mathfrak{u}_0^C \cap \mathfrak{u}^{\lambda'}$. 因此知 $\mathfrak{u}_0^C = \sum(\mathfrak{u}_0^C \cap \mathfrak{u}^{\lambda'})$. 如果 $\mathfrak{u}_0^C \cap \mathfrak{u}^{\lambda'} \neq 0$, 那么 λ' 是 $\mathfrak{u}_0$ 的一个根. 所以 $\mathfrak{u}_0$ 的根都是 $\mathfrak{u}$ 的根诱导而得. □

引理 2 设 $\mathfrak{h}$ 是紧致代数 $\mathfrak{u}$ 的 Cartan 子代数. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 是 $\mathfrak{h}$ 内 l 个线性无关的根, 且任何根均可写成 $\pm(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \cdots + n_l\alpha_l)$, 其中 n_i $(1 \leq i \leq l)$ 是非负整数. 则 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ 可作为 $\mathfrak{u}$ 的一素根系.

这是熟知的事实, 证明略去. □

定义 1 紧致半单李代数 $\mathfrak{u}$ 的正则对合自同构 t_0 所确定的特征子代数 $\mathfrak{u}_0 = \{x \in \mathfrak{u} | t_0(x) = x\}$ 叫做 **正则特征子代数**.

引理 3 设 $\mathfrak{u}$ 是紧致李代数, t_0 为正则对合自同构, $\mathfrak{u}_0$ 是对应的正则特征子代数. $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_0$ 分别为 $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}_0$ 的 Cartan 子代

数. 且 $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{h}_0$. α 是 $\mathfrak{u}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根. α' 是 α 在 $\mathfrak{h}_0$ 上的诱导. 则

$$\alpha' = \frac{1}{2}(\alpha + t_0(\alpha)).$$

证 由于 $t_0(\frac{1}{2}(\alpha+t_0(\alpha))) = \frac{1}{2}(t_0(\alpha)+\alpha)$, 故 $\frac{1}{2}(\alpha+t_0(\alpha)) \in \mathfrak{h}_0$. 又若 $H \in \mathfrak{h}_0$, 则有

$$(\alpha,\ H) = (t_0(\alpha),\ t_0(H)) = (t_0(\alpha),\ H).$$

故 $\alpha' = t_0(\alpha)'$, 因此 $\alpha' = \frac{1}{2}(\alpha' + t_0(\alpha)') = \frac{1}{2}(\alpha + t_0(\alpha))' = \frac{1}{2}(\alpha + t_0(\alpha))$. □

系 若 $\alpha_i \in \Pi$, 且 $\alpha_i' = \alpha_j'$, 则 $\alpha_i = \alpha_j$ 或 $\alpha_i = t_0(\alpha_j)$.

证 因 $t_0(\Pi) = \Pi$, 又 $\alpha_i' = \alpha_j'$, 故得 $\alpha_i + t_0(\alpha_i) = \alpha_j + t_0(\alpha_j)$, 故 $\alpha_i = \alpha_j$ 或 $t_0(\alpha_j) = \alpha_i$. □

命题 1 正则特征子代数的素根系 Π' 是 $\mathfrak{u}$ 的素根系 Π 在 $\mathfrak{h}_0$ 上的诱导.

证 因 t_0 是正则对合自同构, 故

$$t_0(x_{\pm\alpha_i}) = x_{\pm t_0(\alpha_i)}.$$

于是 $x_{\alpha_i} + x_{t_0(\alpha_i)} \in \mathfrak{u}_0^C$. 若 $H \in \mathfrak{h}_0$, 则

$$(\alpha_i,\ H) = (t_0(\alpha_i),\ t_0(H)) = (t_0(\alpha_i),\ H).$$

故 $\alpha_i|_{\mathfrak{h}_0} = t_0(\alpha_i)|_{\mathfrak{h}_0}$. 令 $H_0 \in \mathfrak{h}_0$, 则

$$[H,\ x_{\alpha_i} + x_{t_0(\alpha_i)}] = \alpha_i'(H_0)(x_{\alpha_i} + x_{t_0(\alpha_i)}).$$

故 α_i' 是 $\mathfrak{u}_0$ 的一个根.

设 $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_{l'}'$ 是 $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_l'$ 中互不相同的根. 我们将证明 $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_{l'}'$ 是线性无关的.

首先，对于 $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq l'$ 有 $t_0(\alpha_j) \neq \alpha_i$. 若不然，即 $t_0(\alpha_j) = \alpha_i$, 则 $\alpha'_j = \frac{1}{2}(\alpha_j + t_0(\alpha_j)) = \frac{1}{2}(t_0(t_0(\alpha_j)) + \alpha_i) = \frac{1}{2}(\alpha_i + t_0(\alpha_i)) = \alpha'_i$, 矛盾.

设 $n'_1\alpha'_1 + n'_2\alpha'_2 + \cdots + n'_{l'}\alpha'_{l'} = 0$, 则

$$\sum_{k=1}^{l'} \frac{n'_k}{2}(\alpha_1 + t_0(\alpha_k)) = 0.$$

由于 $t_0\Pi = \Pi$, 于是有

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \cdots + n_{l'}\alpha_{l'} + \cdots + n_l\alpha_l = 0.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ 线性无关，故 $n_1 = n_2 = \cdots = n_{l'} = \cdots = n_l = 0$. 而 $i = 1, 2, \ldots, l'$ 时有 $n_i = \frac{n'_i}{2}$ 或 n'_i, 故 $n'_1 = n'_2 = \cdots = n'_l = 0$, 故 $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{l'}$ 线性无关.

又由引理 1 知，对任何 $\alpha' \in \Delta'$ 有 $\pm\alpha' = n_1\alpha'_1 + \cdots + n_l\alpha'_l$, $n_i \geq 0$. 由引理 2 知 Π' 是 $\mathfrak{u}_0$ 对 $\mathfrak{h}_0$ 的素根系. □

以后将 $\frac{\alpha'_j}{2\pi i}$ 嵌入 $\mathfrak{h}_0$ 中，并视为 $\mathfrak{h}_0$ 的一个向量.

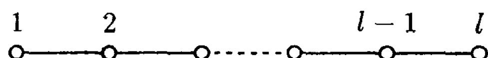
命题 2 紧致单李代数 $\mathfrak{u}$ 的正则特征子代数 $\mathfrak{u}_0$ 也是紧致单的.

证 设 t_0 是 $\mathfrak{u}_0$ 对应的对合自同构.

若 $t_0 = I$, 则 $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}$, 命题自然成立.

若 $t_0 \neq I$, 则只有下述几种情况:

1. A_l: A_l 的图为



此时有 $t_0(\alpha_i) = \alpha_{l-i+1}$. 于是有两种情形.

(i) l 为奇数， $\mathfrak{u}_0$ 的根系的图为

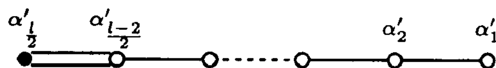


其中

$$\alpha'_k = \frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_{l-k+1}), \quad 1 \leq k \leq \frac{l-1}{2};$$
$$\alpha'_{\frac{l+1}{2}} = \alpha_{\frac{l+1}{2}}.$$

即 u_0 为 $C_{\frac{l+1}{2}}$.

(ii) l 是偶数. 此时 u_0 的图为

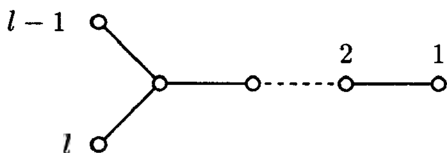


其中

$$\alpha'_i = \frac{\alpha_i + \alpha_{l-i+1}}{2}, \quad 1 \leq i \leq \frac{l}{2}.$$

即 u_0 为 $B_{\frac{l}{2}}$.

2. D_l: D_l 的图为



$t_0(\alpha_i) = \alpha_i$, $i \leq l-2$, $t_0(\alpha_{l-1}) = \alpha_l$. 于是 u_0 的图为

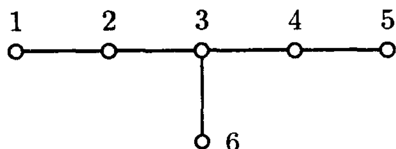


其中

$$\alpha_i' = \alpha_i,\ i \leq l-2,\ \alpha_{l-1}' = \frac{1}{2}(\alpha_{l-1} + \alpha_l).$$

即 $\mathfrak{u}_0$ 是 B_{l-1} .

3. E_6: E_6 之图为



故 $t_0(\alpha_1) = \alpha_5$, $t_0(\alpha_2) = \alpha_4$, $t_0(\alpha_3) = \alpha_3$, $t_0(\alpha_6) = \alpha_6$. 于是 $\mathfrak{u}_0$ 的图为



其中

$$\alpha_6' = \alpha_6,\ \alpha_3' = \alpha_3,\ \alpha_1' = \frac{\alpha_1 + \alpha_5}{2},\ \alpha_2' = \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}.$$

即 $\mathfrak{u}_0$ 是 F_4.

总结以上情况知 $\mathfrak{u}_0$ 是单的.

定理 1 设 $t = t_0 e^{\mathrm{ad}\, H_0}$ 是紧致半单李代数 $\mathfrak{u}$ 的对合自同构, t_0 是正则对合自同构, $\mathfrak{u}_0$ 是对应的正则特征子代数, Π, $\Pi' = \Pi|_{\mathfrak{h}_0}$ 分别为 $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}_0$ 的素根系. 则 H_0 满足:

$$(\alpha_1',\ H_0) = \frac{1}{2};\ (\alpha_k',\ H_0) = 0,\ k > 1;\ (\lambda', H_0) \leq 1.$$

若 $\alpha_1' \neq \alpha_1$, 则 t 与 t_0 内共轭. 即有 $\gamma \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{u}$ 使得 $\gamma t \gamma^{-1} = t_0$.

证 若 $\alpha_1' \neq \alpha_1$, 即 $\frac{1}{2}(\alpha_1 + t_0(\alpha_1)) \neq \alpha_1$. 故 $t_0(\alpha_1) \neq \alpha_1$. 但 $t_0(\alpha_1) \in \Pi$. 不妨设 $t_0(\alpha_1) = \alpha_2$. 此时有 $t_0(\alpha_2) = \alpha_1$. 于是有

$$t(x_{\alpha_1}) = -x_{\alpha_2}, \quad t(x_{\alpha_2}) = -x_{\alpha_1},$$
$$t(x_{\alpha_i}) = x_{\alpha_i},\ i > 2.$$

取 γ 如下:

$$\gamma(\alpha_i) = \alpha_i,$$
$$\gamma(x_{\pm\alpha_1}) = -x_{\pm\alpha_1},$$
$$\gamma(x_{\pm\alpha_i}) = x_{\pm\alpha_i},\ i > 1.$$

于是有 $\gamma^{-1} = \gamma$. 且

$$\gamma t\gamma(\alpha_i) = t(\alpha_i) = t_0(\alpha_i);$$
$$\gamma t\gamma(x_{\alpha_1}) = \gamma t(-x_{\alpha_1}) = \gamma(x_{\alpha_2}) = x_{\alpha_2} = t_0 x_{\alpha_1};$$
$$\gamma t\gamma(x_{\alpha_2}) = \gamma t(x_{\alpha_2}) = \gamma(-x_{\alpha_1}) = x_{\alpha_1} = t_0 x_{\alpha_2};$$
$$\gamma t\gamma(x_{\alpha_i}) = x_{\alpha_i} = t_0 x_{\alpha_i},\ i > 2.$$

故 $\gamma t\gamma^{-1} = t_0$. 又 $\gamma \in R_0$, 故 $\gamma \in \mathrm{Ad}\,u$, 即 t 与 t_0 内共轭.

总结以上结论知 $t_0 e^{\mathrm{ad}\, H_0}$ 中 H_0 的选取可分为两种类型:

1. $e^{\mathrm{ad}\, H_0} = I$.
2. $e^{\mathrm{ad}\, H_0} \neq I$, 此时可选择 H_0 满足:

$$\alpha_1 = \alpha_1';\ (\alpha_1,\ H_0) = \frac{1}{2};\ (\alpha_k,\ H_0) = 0,\ k > 1.$$

且在 $\lambda' = \sum m_i\alpha_i'$ 中 $m_1 = 1$ 或 $m_1 = 2$. □

3.13 实表示论的定理

3.13.1 关于复线性空间的链

设 V 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，V^C 是 V 的复化，即

$$V^C = \{x_1 + ix_2 | x_1,\ x_2 \in V\}.$$

V^C 中的映射 $\sigma:\ x_1 + ix_2 \to x_1 - ix_2$ 叫做由 V 决定的 **共轭**. 记为 $\bar{x} = \sigma(x)$. 于是有

(1) σ 是 V^C 上半线性变换，即 $\sigma(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}\sigma(x) + \bar{\beta}\sigma(y)$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $x, y \in V^C$.

(2) $\sigma^2 = I$.

(3) $x \in V$ 当且仅当 $\bar{x} = x$. 此时称 x 是一个实向量. V 称为 V^C 的一个 **链**.

(4) 设 γ 是 V 的一个线性变换，则自然地可扩充为 V^C 的线性变换.

$$\gamma(x_1 + ix_2) = \gamma(x_1) + i\gamma(x_2),\ x_1, x_2 \in V.$$

对 V^C 的一个线性变换 γ, 可定义 $\bar{\gamma}$ 如下：$\bar{\gamma} = \sigma\gamma\sigma$, 即 $\bar{\gamma}\bar{x} = \overline{\gamma x}$. 若 $\gamma = \bar{\gamma}$, 则称 γ 为 **实变换**.

显然 γ 是实变换当且仅当 $\gamma\sigma = \sigma\gamma$.

(5) V^C 的线性变换 γ 是实变换当且仅当 γ 是 V 上一个线性变换的扩充.

引理 1 设 V 是复线性空间. σ 是 V 上半线性对应，且 $\sigma^2 = I$. 则 $\{x + \sigma(x) | x \in V\}$ 是 V 的一个链，其在 V 中决定的共轭就是 σ.

证 V 可自然地看成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，记为 V^R, σ 自然地视为 $V^{\mathbf{R}}$ 上的线性变换. 由 $\sigma^2 = I$, 故 σ 是对合的. 故有

$$V^R = V_+ \dot{+} V_-,\quad V_\pm = \{x \in V^{\mathbf{R}} | \sigma x = \pm x\}.$$

若 $x \in V_+$, 则由 $\sigma(ix) = -ix$ 知 $ix \in V_-$. 若 $x \in V_-$, 则 $\sigma(ix) = ix$, 即 $ix \in V_+$. 因而 $V_- = iV_+$, 故 $V^R = V_+ + iV_+$, 由此可得 $\dim V^R = 2\dim V_+$. 故 $\dim_{\mathbf{R}} V_+ = \dim_{\mathbf{C}} V$. 故 V_+ 是 V 的一个链. 而 $\{x + \sigma(x) | x \in V^{\mathbf{R}}\} \subseteq V_+$ 且维数相同. 故 $V_+ = \{x + \sigma(x) | x \in V\}$. 设相应的共轭为 σ', 则

$$\sigma'(x_1 + ix_2) = x_1 - ix_2 = \sigma(x_1) + \sigma(ix_2) = \sigma(x_1 + ix_2).$$

故 $\sigma' = \sigma$. □

3.13.2 紧致李代数的实表示

设 $\mathfrak{u}$ 是紧致李代数, V 是一个实线性空间. $\rho : x \to \rho(x)$ 是 $\mathfrak{u}$ 在 V 上的一个线性表示. V^C 是 V 的复化. 则对任何 $x \in \mathfrak{u}$, $\rho(x)$ 可自然地扩充为 V^C 的线性变换. 故得到 $\mathfrak{u}$ 在 V^C 上的一个表示, 记为 (ρ^C, V^C), 称为 (ρ, V) 的 **复化**.

实李代数 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^C$ 的表示 (ρ, V), 也简称为 $\mathfrak{g}$ 的 **复表示**, 仍记为 (ρ, V).

定义 1 紧致李代数 $\mathfrak{u}$ 的实不可约表示 (ρ, V) 称为 **第一类型的**, 若 (ρ^C, V^C) 亦不可约. 否则称为 **第二类型的**, 即 (ρ^C, V^C) 可约.

命题 1 设 (ρ, V) 是紧致李代数 $\mathfrak{u}$ 的一个复不可约表示. 则若有 $\mathfrak{u}$ 的实不可约表示 (ρ_0, V_0) 使得 $(\rho, V) = (\rho_0^C, V_0^C)$ 之充分必要条件是存在 V 上的对 ρ 不变的非奇异的对称双线性型.

证 若 $(\rho, V) = (\rho_0^C, V_0^C)$. 因 (ρ_0, V_0) 是实不可约表示, 由 H. Weyl 定理有 V_0 上的正定二次型 (x, y) 对 ρ_0 不变. 即

$$(\rho_0(u)x, y) + (x, \rho_0(u)y) = 0, \quad \forall x, y \in V_0, \ u \in \mathfrak{u}.$$

V_0 上的二次型可自然地扩充为 $V=V_0^C$ 上的二次型：

$(x_1+ix_2,\ y_1+iy_2)=(x_1,\ y_1)-(x_2,\ y_2)+i(x_1,\ y_2)+i(x_2,\ y_1)$.

易证此二次型对 $\rho(u)=\rho_0^C(u)$ 是不变的，即

$$(\rho_0^C(u)x,\ y)+(x,\ \rho_0^C(u)y)=0.$$

故 $(\rho,\ V)$ 有不变的非奇异双线性型.

反之，若 $(\rho,\ V)$ 有不变的非奇异双线性型 $(x,\ y)$. 由 H. Weyl 定理知 $(\rho,\ V)$ 还有正定不变 Hermite 型 $H(x,\ y)$.

定义 V 到 V 的映射 σ, 使得 $H(x,\ y)=(x,\ \sigma y)$. 容易验证

$$\begin{aligned}&(x,\ \sigma(y_1+y_2))=(x,\ \sigma(y_1)+\sigma(y_2)),\\&(x,\ \sigma(\alpha y))=(x,\ \bar{\alpha}\sigma(y)).\end{aligned}$$

故 σ 是一个半线性对应. 而且对任何 $u\in \mathfrak{u}$, 有

$$\begin{aligned}(x,\ \sigma\rho(u)y)&=H(x,\ \rho(u)y)\\&=-H(\rho(u)x,\ y)=-(\rho(u)x,\ \sigma y)\\&=(x,\ \rho(u)\sigma y).\end{aligned}$$

即 $\sigma\rho(u)=\rho(u)\sigma$. 令

$$\psi(x,\ y)=(x,\ \sigma^2 y)=H(x,\ \sigma y),$$

则

$$\begin{aligned}\psi(\rho(u)x,\ y)&=H(\rho(u)x,\ \sigma y)=-H(x,\ \rho(u)\sigma y)\\&=-H(x,\ \sigma\rho(u)y)=-\psi(x,\ \rho(u)y).\end{aligned}$$

于是 $\psi(x,\ y)$ 亦为 V 的一个对 ρ 不变的非奇异双线性型. 由 $(\rho,\ V)$ 不可约性, 及线性表示的一个定理 (参看 [34] 的第一章 §7 命题 3) 知

$$\psi(x,\ y) = c(x,\ y) \text{ 即 } (x,\ \sigma^2 y) = c(x,\ y).$$

于是 $\sigma^2 = cI \neq 0$. 而

$$\begin{aligned} H(x,\ x) &= (x,\ \sigma x) = (x,\ \sigma^2\sigma^{-1}x) \\ &= c(x,\ \sigma^{-1}x) = c(\sigma^{-1}x,\ x) \\ &= cH(\sigma^{-1}x,\ \sigma^{-1}x). \end{aligned}$$

故

$$c = \frac{H(x,\ x)}{H(\sigma^{-1}x,\ \sigma^{-1}x)} > 0.$$

令 $\sigma' = \frac{1}{\sqrt{c}}\sigma$, 则 $\sigma'^2 = 1$. 显然 $\rho(u)\sigma' = \sigma'\rho(u)$. 因而 $V_0 = \{x + \sigma' x | x \in V\}$ 是 V 的一个链, 而且

$$\rho(u)(x + \sigma' x) = \rho(u)x + \rho(u)\sigma' x = \rho(u)x + \sigma'\rho(u)x \in V_0.$$

故 V_0 在 $\rho(u)$ 下不变. 令 $\rho_0 = \rho|_{V_0}$, 则 $(\rho_0,\ V_0)$ 是 u 的一个实表示. 且 $(\rho_0^C,\ V_0^C) = (\rho,\ V)$. $(\rho,\ V)$ 不可约. 故 $(\rho_0,\ V_0)$ 不可约. 故 $(\rho_0,\ V_0)$ 是第一类型的. □

引理 2 设 $(\rho,\ V)$ 是紧李代数 u 的第二类型的不可约表示, 即 $(\rho^C,\ V^C)$ 可约, 则 $\exists\, V_1 \subset V^C$ 使得

$$V^C = V_1 \dot{+} \bar{V}_1,$$

其中 $V_1, \bar{V}_1 = \sigma V_1$ 是 ρ^C 的不可约不变子空间. σ 是 V 在 V^C 中的共轭.

证 设 V_1 是 V^C 的一个不可约不变子空间. 则 $\bar{V}_1=\sigma V_1$ 变为 V^C 的一个子空间. 因 $\rho^C(u)$ 是 $\rho(u)$ 的扩充. 故

$$\rho^C(u)\sigma=\sigma\rho^C(u),\ \forall u\in \mathfrak{u}.$$

故 $\rho^C(u)\sigma V_1=\sigma\rho^C(u)V_1\subseteq\sigma V_1$. 故 $\bar{V}_1$ 亦为 ρ^C 的不变子空间. 若 $\bar{V}_1$ 可约, 则有 $V_2\neq 0$, $V_2\subset\sigma\bar{V}_1$ 使得 $\rho^C(u)V_2\subseteq V_2$. 故有

$$\rho^C(u)\sigma V_2=\sigma\rho^C(u)V_2\subseteq\sigma V_2\subset\sigma\bar{V}_1=\sigma^2V_1=V_1,$$

即 σV_2 是 V_1 中的真不变子空间. 这是不可能的. 故 $\bar{V}_1$ 亦不可约.

令

$$V'=V_1+\bar{V}_1,\ V_0=\{x+\sigma x|x\in V_1\}.$$

显然 $V_0\subseteq V$, 而且对任何 $u\in\mathfrak{u}$ 有

$$\rho(u)(x+\sigma x)=\rho^C(u)(x+\sigma x)=\rho^C(u)x+\sigma\rho^C(u)x\in V_0,$$

即 V_0 是不变子空间, 故 $V_0=V$. 又 $V_0\subseteq V'$. 故 $V_0^C\subseteq V'$, 即 $V^C=V'$. 又 $V_1\cap\bar{V}_1$ 亦为不变子空间, $V_1,\bar{V}_1$ 不可约. 故 $V_1\cap\bar{V}_1=\{0\}$. 因而

$$V^C=V_1\dot{+}\bar{V}_1.$$

□

引理 3 设 $(\rho_1,\ V_1)$, $(\rho_2,\ V_2)$ 是 $\mathfrak{u}$ 的两个实表示, 且

$$(\rho_1^C,\ V_1^C)=(\rho_2^C,\ V_2^C),$$

则 $(\rho_1,\ V_1)$ 与 $(\rho_2,\ V_2)$ 等价.

证 设 σ_i 为 V_i 在 $V=V_i^C$ 中的共轭. 则

$$V_i=\{x+\sigma_i x|x\in V\},\quad \rho_i^C=\rho.$$

令 $\gamma(x+\sigma_1 x)=x+\sigma_2 x$. 则 γ 是 V_1 到 V_2 上的可逆线性变换. 又

$$\begin{aligned}&\gamma\rho_1(u)\gamma^{-1}(x+\sigma_2 x)\\&=\gamma\rho_1(u)(x+\sigma_1 x)=\gamma(\rho_1^C(u)x+\sigma_1\rho_1^C(u)x)\\&=\rho_1^C(u)x+\sigma_2\rho_1^C(u)x=\rho_2^C(u)x+\sigma_2\rho_2^C(u)x\\&=\rho_2(u)(x+\sigma_2 x).\end{aligned}$$

故 $\rho_2(u)=\gamma\rho_1(u)\gamma^{-1}$, 即 $(\rho_1,\ V_1)$ 与 $(\rho_2,\ V_2)$ 等价.

我们知道, 若 $(\rho,\ V)$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个线性表示, 则可定义 $\mathfrak{g}$ 在 V 的对偶空间 V^* 上的一个线性表示 $(\rho^*,\ V^*)$ 为:

$$(\rho^*(u)f)(x)=-f(\rho(u)x),\ \ u\in\mathfrak{g},\ f\in V^*,x\in V.$$

此表示称为 (ρ,V) 的 **对偶表示**.

特别, 若 $(\rho,\ V)$ 是紧李代数 $\mathfrak{u}$ 的复表示, $\Delta=\{\lambda\}$ 为 ρ 之权, 则 $-\Delta=\{-\lambda\}$ 为 ρ^* 的权.

命题 2 紧致李代数 $\mathfrak{u}$ 的复不可约表示 $(\rho',\ V')$ 是 $\mathfrak{u}$ 的一个第二类型的实不可约表示 $(\rho,\ V)$ 的复化的分量, 当且仅当 $(\rho',\ V')$ 不容许非奇异不变对称双线性型.

证 先证必要性. 设 $V^C=V'\dot{+}\bar{V}'$, 其中 $\bar{V}'=\sigma V'$, 而且 $\rho^C|_{V'}=\rho'$. 若 $(\rho',\ V')$ 有不变的非奇异对称双线性型 $(x,\ y)$, 则有 V' 的一个链 V_0 在 ρ' 下不变. $\rho'|_{V_0}=\rho_0$. 故 (ρ_0,V_0) 是实不可约表示. 且 $(\rho_0^C,\ V_0^C)=(\rho',V')$.

显然, $\sigma V_0\subseteq\bar{V}'$, 且 σV_0 亦为实空间. $\dim_{\mathbf{R}}\sigma V_0=\dim_{\mathbf{C}}\bar{V}'$. 故 σV_0 亦为 $\bar{V}'$ 的一个链. 且 $\forall u\in\mathfrak{u}$ 有

$$\rho^C(u)\sigma V_0\subseteq\sigma\rho^C(u)V_0\subseteq\sigma V_0.$$

故 $\bar{V_0}=\sigma V_0$ 在 ρ^C 下不变. 故 $V_0+\bar{V_0}$ 是 V^C 的一个链, 且在 ρ^C 下不变. 令 $\rho_0=\rho^C|_{V_0+\bar{V_0}}$. 于是有 $\rho^C=\rho_0^C$. 故 ρ 与 ρ_0 等价. 但 ρ_0 是可约的, 矛盾. 故 $(\rho',\ V')$ 不容许非奇异不变对称双线性型.

再证充分性. 设 $(\rho'^*,\ V'^*)$ 是 $(\rho',\ V')$ 的对偶表示. 令

$$V=V'\dot{+}V'^*,\quad \rho=\rho'\oplus\rho'^*.$$

设 $H(x,\ y)$ 是 V' 内的不变 Hermite 型. 定义 V' 到 V'^* 中的半线性对应 σ' 满足:

$$(\sigma'(y))(x)=H(x,\ y),\quad \forall\, x,\ y\in V'.$$

令 $\sigma=\sigma'\oplus\sigma'^{-1}$, 则 $\forall x\in V',\ y\in V'^*$ 有

$$\begin{aligned}\sigma^2(x+y)\ &=\sigma(\sigma'(x)+\sigma^{-1}(y))=\sigma'^{-1}\sigma'(x)+\sigma'\sigma'^{-1}(y)\\&=x+y.\end{aligned}$$

即有 $\sigma^2=I$. 又记 $H(x,\ y)=<x,\ \sigma'(y)>$, 则由 H 对 ρ' 的不变性, 有

$$<\rho'(u)x,\ \sigma'(y)>+<x,\ \sigma'\rho'(u)y>=0.$$

即有

$$-<x,\ \rho'^*(u)\sigma'(y)>+<x,\ \sigma'\rho'(u)y>=0,$$

即有 $\rho'^*\sigma'=\sigma'\rho'$. 取 $x\in V',\ y\in V'^*$, 则有

$$\rho(u)\sigma(x+y)=\rho(u)(\sigma'x+\sigma'^{-1}y)=\sigma\rho(u)(x+y).$$

即

$$\rho\sigma=\sigma\rho.$$

显然 $V_0=\{x|\sigma x=x\}$ 是 V 的一个链，而且在 ρ 下不变．于是 $(\rho,\ V_0)$ 是一个实表示．而 $(\rho',\ V')$ 是 $(\rho^C,\ V_0^C)=(\rho,\ V)$ 的一个子表示，且 $(\rho,\ V_0)$ 是实不可约表示．因为不然的话，设有 $V_1\neq 0$, $V_1\subseteq V_0$ 为不变子空间．故 $(\rho^C,\ V_1^C)$ 是 $(\rho,\ V)$ 的子表示，因而与 $(\rho',\ V')$ 或 $(\rho'^*,\ V'^*)$ 等价，故不可约．故 $(\rho,\ V_1)$ 是第一类型的．不妨设 $(\rho^C,\ V_1^C)\approx(\rho',\ V')$．故 $(\rho',\ V')$ 是第一类型实不可约表示的复化，因而有不变对称双线性型，矛盾．于是 $(\rho,\ V_0)$ 是实不可约表示．其复化可约，不可约分量之一是 $(\rho',\ V')$． □

我们忆及，ρ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示，其首权为 Λ．则任一权 λ 可写成 $\lambda=\Lambda-\alpha_{i_1}-\cdots-\alpha_{i_s}$, α_{i_j} 是素根． s 称为 λ 的层数．于是 ρ 的权系 $\Sigma=\Sigma^0\cup\Sigma^1\cup\cdots\cup\Sigma^T$, Σ^s 是 ρ 的层数为 s 的权的集合． T 称为 ρ 的高度，以 $T(\rho)$ 表示之．而且有

$$T(\rho)=\sum_{\alpha\in\Pi}\gamma_\alpha\Lambda_\alpha,$$

其中 $\Lambda_\alpha=\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$; $\gamma_\alpha=T(\rho_\alpha)$, 而 ρ_α 是首权 Λ 满足

$$\Lambda_\alpha=1;\ \Lambda_\beta=0,\ \beta\neq\alpha$$

的不可约表示．

由表示论的理论知 $(\rho,\ V)$ 容许非退化不变双线性型的充要条件是 $\rho\approx\rho^*$．(参看 [34].)

由此即可得下面结果．

命题 3 一个半单紧致李代数的复表示 $(\rho',\ V')$ 是第一类型的复化的充要条件是 $(\rho',\ V')$ 满足：

(1) $\rho'\approx\rho'^*$;

(2) $T(\rho')\cong 0\,(\mathrm{mod}2)$.

3.14 正则特征子代数的表示

设 $\mathfrak{u}$ 是紧致单李代数， t 是一对合自同构，相应有分解 $\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_1+V$. $\mathfrak{u}_1$ 是特征子代数. $\mathrm{ad}\,\mathfrak{u}_1|_V=\mathrm{ad}_V\mathfrak{u}_1$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的表示. $\mathfrak{u}$ 的 Killing (,) 在 V 上的限制为此表示的不变内积，称为 **Cartan 判别式**.

定理 1 设 $\mathfrak{u}$ 是紧致单李代数， t 是一对合自同构，相应有分解 $\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_1+V$, $\mathfrak{u}_1$ 是特征子代数，则 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{u}_1|_V=\mathrm{ad}_V\mathfrak{u}_1$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的不可约表示.

证 若不然，则 V 有分解 $V=V_1+V_2$. V_1, V_2 都是 $\mathrm{ad}_V\mathfrak{u}_1$ 的不变子空间，而且在 Cartan 判别式的意义下互相正交. 由于

$$([X,\ Y],\ Z)+(X,\ [Y,\ Z])=0.$$

若取 $X\in V_1$, $Y\in V_2$, $Z\in\mathfrak{u}_1$, 则有 $(X,\ [Y,\ Z])=0$. 故 $([X,\ Y],\ Z)=0$. 但 $[X,\ Y]\in\mathfrak{u}_1$. 因此 $[X,\ Y]=0$, 即 $[V_1,\ V_2]=0$.

令 $\mathfrak{u}'=V_1+[V_1,\ V_1]$. 则由

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{u},V_1]\ &=[\mathfrak{u}_1,\ V_1]+[V_1,V_1]+[V_2,V_1]\\
&\subseteq V_1+[V_1,V_1],\\
[\mathfrak{u},\ [V_1,\ V_1]]\ &=[V_1,\ [\mathfrak{u},\ V_1]]\\
&\subseteq[V_1,\ V_1],
\end{aligned}$$

知 $[\mathfrak{u},\ \mathfrak{u}']\subseteq\mathfrak{u}'$. 即 $\mathfrak{u}'$ 是 $\mathfrak{u}$ 的理想. 但 $\mathfrak{u}'\subseteq\mathfrak{u}_1+V_1\subset\mathfrak{u}$, 这与 $\mathfrak{u}$ 是单的矛盾. 故 $\mathrm{ad}_V\mathfrak{u}_1$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的不可约表示. □

由于 $\mathrm{ad}_V\mathfrak{u}_1$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的实不可约表示，故对它的分类只需决定它的类型及复化后不可约分支的首权.

设 $t=t_0e^{\mathrm{ad}\,H}$, t_0 是正则对合自同构，对应的正则特征子代数为 $\mathfrak{u}_0$. $H\in\mathfrak{h}_0=\mathfrak{u}_0\cap\mathfrak{h}$. $\mathfrak{u}_1$ 是 t 对应的特征子代数. 因为

$t|_{\mathfrak{h}} = t_0|_{\mathfrak{h}}$, 所以有

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{h} | t_0 x = x\} = \{x \in \mathfrak{h} | tx = x\} = \mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{h}.$$

又对 $\mathrm{mod}\mathfrak{h}$ 标准 Weyl 基 $\{x_\alpha\}$ 有

$$t_0 X_\alpha = X_{t_0 \alpha} = X_{t\alpha}.$$

以 α' 表示 α 在 $\mathfrak{h}_0$ 上的诱导, 则有

$$(H,\ \alpha'_k) = \frac{1}{2}\delta_{1\,k}, \quad \alpha_k \in \Pi.$$

故有

$$tX_\alpha = \pm X_{t\alpha}.$$

设 $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + V_1$. 令 Δ'_1, Δ'_2 分别为表示 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{u}_1}\mathfrak{u}_1$, $\mathrm{ad}_{V_1}\mathfrak{u}_1$ 的权系. $\alpha' = \alpha|_{\mathfrak{h}_0}$. $\Delta_i = \{\alpha \in \Delta | \alpha' \in \Delta'_i\}$, 仍将 $\frac{\alpha}{2\pi i}$ 表示为 α. 我们有下面结果.

引理 1 (1) 如果 $\alpha \in \Delta$, 且 $\alpha' \neq \alpha$, 则 $\alpha \in \Delta_1 \cap \Delta_2$;

(2) 如果 $\alpha \in \Delta$, $\alpha' = \alpha$, 且 $t(X_\alpha) = X_\alpha$, 则 $\alpha \in \Delta_1$;

(3) 如果 $\alpha \in \Delta$, $\alpha' = \alpha$, 且 $t(x_\alpha) = -x_\alpha$, 则 $\alpha \in \Delta_2$.

证 如果 $H \in \mathfrak{h}_0$, 则由 $(H,\ \alpha) = (H,\ \alpha')$, $\alpha' = t(\alpha)'$ 有

$$\begin{aligned}
[H,\ X_\alpha] &= 2\pi i(H,\ \alpha)x_\alpha = 2\pi i(H,\ \alpha')x_\alpha, \\
[H,\ t(x_\alpha)] &= t[t^{-1}H,\ x_\alpha] = 2\pi i(t^{-1}(H),\ \alpha)tx_\alpha \\
&= 2\pi i(H,\ t(\alpha))tx_\alpha = 2\pi i(H,\ t(\alpha)')tx_\alpha \\
&= 2\pi i(H,\ \alpha')tx_\alpha.
\end{aligned}$$

因此

$$[H,\ x_\alpha \pm t(x_\alpha)] = 2\pi i(H,\ \alpha')(x_\alpha \pm tx_\alpha).$$

若 $\alpha\neq\alpha'$, 则 $t(\alpha)=t_0(\alpha)\neq\alpha$, 所以 $x_\alpha\pm t(x_\alpha)\neq 0$. 因为 $x_\alpha\in\mathfrak{u}^\alpha$, $t(x_\alpha)\in\mathfrak{u}^{t_0(\alpha)}$, 故 $x_\alpha\pm t(x_\alpha)$ 都是 $\mathfrak{u}^{\alpha'}$ 内的权向量，其权为 α'. 且 $x_\alpha+t(x_\alpha)\in\mathfrak{u}_1^C$, $x_\alpha-t(x_\alpha)\in V_1^C$, 故 $\alpha\in\Delta_1\cap\Delta_2$.

如果 $\alpha=\alpha'$, 则 $t(\alpha)=t_0(\alpha)=\alpha$. t 是对合自同构，故有 $t(x_\alpha)=\pm x_\alpha$. 若 $t(x_\alpha)=x_\alpha$, 则 $x_\alpha\in\mathfrak{u}_1^C$ 即 $\alpha\in\Delta_1$. 若 $t(x_\alpha)=-x_\alpha$, 则 $x_\alpha\in V_1^C$, 即 $\alpha\in\Delta_2$. □

系 1 令 $\Delta_0=\Delta_1\cap\Delta_2$, $\Delta_c=\Delta_1\setminus\Delta_0$, $\Delta_n=\Delta_2\setminus\Delta_0$. 则

$$\Delta_0=-\Delta_0;\ \Delta_c=-\Delta_c;\ \Delta_n=-\Delta_n.$$

证 事实上，若 $\alpha\in\Delta_0$, 则 $-\alpha\in\Delta_0$; 若 $\alpha\in\Delta_c$, 则 $-\alpha'=(-\alpha)'\in\Delta_1'$, 故 $-\alpha'=-\alpha\in\Delta_c$; 若 $\alpha\in\Delta_n$, 则 $-\alpha'=(-\alpha)'\in\Delta_2'$, 故 $-\alpha'=-\alpha\in\Delta_n$. □

由此我们可将 $\mathfrak{u}$ 的根系分为三类： $\Delta_0=\Delta_1\cap\Delta_2$; $\Delta_c=\Delta_1\setminus\Delta_0$ 其中的根称为**紧根**; $\Delta_n=\Delta_2\setminus\Delta_0$ 其中的根称为**非紧致根**.

系 2 设 $\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_1+V_1$, 则 $\mathfrak{u}^C$ 中有适当的基 $\{\alpha_k,\ x_\alpha\}$, 使得

(1) $\alpha\in\Delta_0$ 时， $\mathfrak{u}_1$ 中有
$(x_\alpha-x_{-\alpha})+t(x_\alpha-x_{-\alpha})$, $i[(x_\alpha+x_{-\alpha})+t(x_\alpha+x_{-\alpha})]$,
V_1 中有
$(x_\alpha-x_{-\alpha})-t(x_\alpha-x_{-\alpha})$, $i[(x_\alpha+x_{-\alpha})-t(x_\alpha+x_{-\alpha})]$;

(2) $\alpha\in\Delta_c$ 时，有 $x_\alpha-x_{-\alpha}$, $i(x_\alpha+x_{-\alpha})\in\mathfrak{u}_1$;

(3) $\alpha\in\Delta_n$ 时，有 $x_\alpha-x_{-\alpha}$, $i(x_\alpha+x_{-\alpha})\in V_1$.

证 可在 $\mathfrak{u}^C$ 中选一组适当的基 $\{\alpha_k,\ x_\alpha\}$, 使得 $x_\alpha-x_{-\alpha}$, $i(x_\alpha+x_{-\alpha})\in\mathfrak{u}$. 因此，上述结论成立. □

系 3 (1) 若 $t=t_0$ 是正则对合自同构，又 $\alpha_k\in\Pi$, 则 α_k' 是正则特征子代数 $\mathfrak{u}_0$ 的根.

(2) 若 $t = t_0 e^{\mathrm{ad}\, H}$, $t_0(H) = H$, $t = t_0$ 是正则对合自同构, $\mathfrak{u}_1$ 是对应的特征子代数, 则 $\alpha_1 \in \Delta_n$, $\alpha'_k \in \Delta'_1, k > 1$.

证 (1) 此时即为 3.2 的命题 1.

(2) 根据 3.2 末尾的所述的第二类型, 有 $\alpha_1 = \alpha'_1$. 故 $t\alpha_1 = \alpha_1 = \alpha'_1$, 且

$$t(x_{\alpha_1}) = t_0 e^{\mathrm{ad}\, H}(x_{\alpha_1}) = e^{2\pi i (H, \alpha'_1)} t_0 x_{\alpha_1} = e^{\pi i} x_{\alpha_1} = -x_{\alpha_1}.$$

故由引理 1 知 $\alpha'_1 \in \Delta'_2$. 故 $\alpha_1 \in \Delta_n$. 又 $k > 1$, $(H, \alpha'_k) = 0$, 则 $tx_{\alpha_k} = x_{\alpha_k}$, 或 $\alpha'_k \neq \alpha_k$. 故 $\alpha'_k \in \Delta'_1$, 即 α'_k 是 $\mathfrak{u}_1$ 的根. □

定理 2 设 u 是紧致单李代数, t_0 是正则对合自同构. $\mathfrak{u}_0$ 是对应的正则特征子代数. ϕ 是 $\mathfrak{u}$ 的首根. 则除 $\mathfrak{u} = A_{2m}$ 外, ϕ' 均是 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{u}_0}\mathfrak{u}_0$ 的首权, 且 $\phi \in \Delta_c$.

证 由 3.2 的命题 2 知 $\mathfrak{u}_0$ 也是单纯紧致的. 若 $t_0 = I$, 则 $\mathfrak{u}_0 = u$, $\phi' = \phi$. 定理自然成立. 对 $t_0 \neq I$, 则有 $\mathfrak{u} = A_l$, D_l, 或 E_6.

$\mathfrak{u} = A_{2m}$ 时, $\mathfrak{u}_0 = B_m$.

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_{2m},$$
$$\phi' = 2(\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_m).$$

此时, ϕ' 不是 $\mathfrak{u}_0$ 的首根, 即 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{u}_0} u_0$ 的首权.

$\mathfrak{u} = A_{2m-1}$ 时, $\mathfrak{u}_0 = C_m$.

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2m-1},$$
$$\phi' = 2(\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_{m-1}) + \alpha_m.$$

而 ϕ' 恰为 $\mathfrak{u}_0$ 的首根, 即 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{u}_0}\mathfrak{u}_0$ 的首权.

$\mathfrak{u} = D_l$ 时, $\mathfrak{u}_0 = B_{l-1}$.

$$\phi = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l,$$

而

$$\phi' = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha'_{l-1})$$

即为 $\mathfrak{u}_0$ 的首根.

$\mathfrak{u} = E_6$ 时, $\mathfrak{u}_0 = F_4$.

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_5 + 2(\alpha_2 + \alpha_4) + 3\alpha_3 + 2\alpha_6,$$
$$\phi' = 2\alpha'_1 + 4\alpha'_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_6$$

即为 $\mathfrak{u}_0$ 的首根.

当 $\mathfrak{u} \neq A_{2m}$ 时, $\phi' \in \Delta'_1$, 又 $\phi' = \phi$. 故 $\phi \in \Delta_c$. □

现在转而求不可约表示 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$, $t_0 = I$. 此时 $V_0 = \{0\}$. 故为平凡表示. 故只需讨论 $t_0 \neq I$, 即 $\mathfrak{u} = A_{2m}$, A_{2m-1}, D_l, 及 E_6 的情形. 为此, 先引入下面定义.

定义 1 设 (ρ, V) 是紧单李代数 $\mathfrak{u}$ 的第一类型的不可约表示. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$; ϕ 分别为 $\mathfrak{u}$ 的素根系与 ϕ 的首权. 在 $\mathfrak{u}$ 的 Dynkin 图中添上表示 $-\phi$ 的点及其与 α_i 的连线的图称为 (ρ, V) 的 **扩充图**.

以下用 $\gamma_i(\mathfrak{u})$ 表示 $\mathfrak{u}$ 的第 i 个基本表示, $\gamma_i^k(\mathfrak{u})$ 代表最高权为 $\gamma_i(\mathfrak{u})$ 的最高权的 k 倍的不可约表示, 等等.

定理 3 (1) $\mathfrak{u} = A_{2m}$, $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 是表示 $\gamma_1^2(B_m)$.

(2) $\mathfrak{u} = A_{2m-1}$, $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 是表示 $\gamma_2(C_m)$.

(3) $\mathfrak{u} = D_l$, $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 是表示 $\gamma_1(B_{l-1})$.

(4) $\mathfrak{u} = E_6$, $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 是表示 $\gamma_1(F_4)$.

且 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 都是第一类型的.

证 欲求表示 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 的首权, 只要求出 Δ_2 内的最高根.

首先我们考虑 $\mathfrak{u}$ 的伴随表示, 由于 $\mathfrak{u}$ 单纯, 故 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{u}$ 不可约. $\mathfrak{u}$ 的首根 ϕ 即为表示的首权. 表示空间为 $\mathfrak{u}$, 它由形如

$$\mathrm{ad}\,X_{-\alpha_{i_1}}\,\mathrm{ad}\,X_{-\alpha_{i_2}}\cdots\mathrm{ad}\,X_{-\alpha_{i_s}}X_\phi$$

$(\alpha_i \in \Pi, X_\phi \in \mathfrak{W})$ 的向量所产生．若 $\phi_0 = \phi - \alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_s}$ 是一个根，则 ϕ_0 可以从 ϕ 逐步减去一个素根得到，且每次的差仍为一根．

其次，设 $t(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, $t^2 = I$. 则有

$$t(X_\alpha) = \nu_\alpha X_{t\alpha}, \quad t(X_\beta) = \nu_\beta X_{t\beta},$$
$$[X_\alpha,\ X_\beta] = N_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta},$$
$$\nu_\alpha \nu_\beta [X_{t(\alpha)},\ X_{t(\beta)}] = N_{\alpha\beta} \nu_{t(\alpha+\beta)} X_{t(\alpha+\beta)},$$

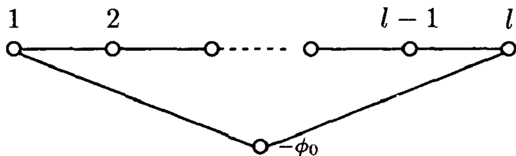
故

$$\nu_{t(\alpha+\beta)} = \frac{1}{N_{\alpha\beta}} \nu_\alpha \nu_\beta N_{t(\alpha)t(\beta)}.$$

特别地，若 $t = t_0$, 且 $t(\alpha) = \alpha$, $t(\beta) = \beta$, 则从 $\nu_\alpha = \nu_\beta = 1$ 得 $\nu_{\alpha+\beta} = 1$. 此即，若 α, $\beta \in \Delta_c$, $\alpha + \beta \in \Delta$, 则 $\alpha + \beta \in \Delta_c$. 又若已知 $\phi \in \Delta_c$, $\alpha_{i_1} \in \Delta_c$, $\phi - \alpha_{i_1} \in \Delta$, 则 $\phi - \alpha_{i_1} \in \Delta_c$.

最后可确定从 ϕ 出发利用逐次减去素根的办法得到 Δ_2 的最高根 $\phi_0 = \phi - \alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_s}$. 若 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s} \in \Delta_c$, $\alpha_{i_s} \in \Delta_0$, 由 $\phi - \alpha_{i_1} \in \Delta$, 知有 $(\phi,\ \alpha_{i_1}) \neq 0$, 故在 $\mathfrak{u}$ 的伴随表示的扩充图中 $-\phi$ 与 α_{i_1} 连接． $\phi - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} \in \Delta$, 则 $(\phi,\ \alpha_{i_2}), (\alpha_{i_1},\ \alpha_{i_2})$ 不能全为 0. 故 α_{i_2} 与 $\{-\phi,\ \alpha_{i_1}\}$ 连接，$\cdots$, 故 $\{-\phi,\ \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\}$ 是一个连通支图． ϕ_0 是 Δ_2 的最高根，则这个支图必须是最小的．且 $\alpha_{i_s} \in \Delta_0$. 由此可求得 ϕ_0 与 ϕ_0' 如下．

1\. $\mathfrak{u} = A_l$ 时，由 $\phi = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l$, $(\phi,\ \alpha_1) = (\phi,\ \alpha_l) \neq 0$, $(\phi,\ \alpha_i) = 0$, $2 \leq i \leq l-1$ 知其伴随表示的扩充图为

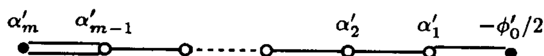


$t_0\alpha_i = \alpha_{l-i+1}$. 这时又分两种情形.

(i) 当 $l=2m$ 时, 因为

$$\phi' = 2(\alpha_1' + \cdots + \alpha_{\frac{m}{2}}')$$

不是 $\mathfrak{u}_0$ 的根. 故 $\phi' \in \Delta_2'$, 因此 $\phi_0 = \phi$, $\phi_0' = \phi'$. 因而此时 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 的扩充图为

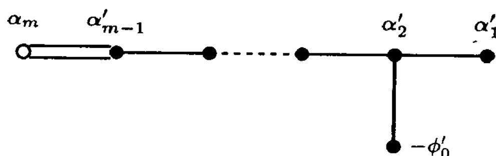


即 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 是表示 $\gamma_1^2(B_m)$.

(ii) 当 $l=2m-1$ 时, 最小支图 $\{-\phi, \alpha_l\}$, $\phi_0 = \phi - \alpha_l$.

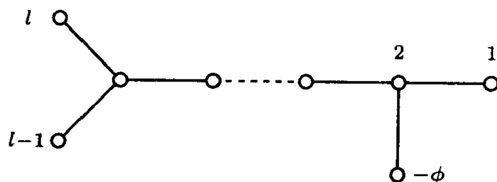
$$\phi_0' = \alpha_1' + 2(\alpha_2' + \cdots + \alpha_{m-1}') + \alpha_m.$$

$\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 的扩充图为



即 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 是表示 $\gamma_2(C_m)$.

2. $\mathfrak{u} = D_l$ 时, 伴随表示的扩充图为



$$\phi = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l \text{ 最小支图是}$$

$$\{-\phi,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_{l-2},\ \alpha_{l-1}\},$$

于是 $\phi_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_l$，故

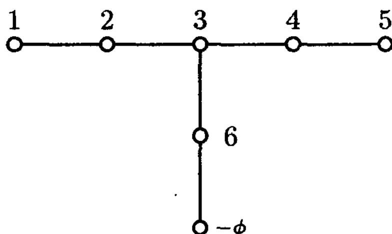
$$\phi_0' = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_{l-1}'.$$

于是 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathrm{u}_0$ 的扩充图为



即 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathrm{u}_0$ 是表示 $\gamma_1(B_{l-1})$.

3. $\mathrm{u} = E_6$ 时，伴随表示的扩充图为



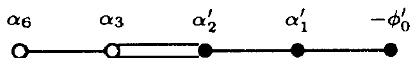
$$\phi = \alpha_1 + \alpha_5 + 2(\alpha_2 + \alpha_4) + 3\alpha_3 + 2\alpha_6, \text{ 最小支图为}$$

$$(-\phi,\ \alpha_6,\ \alpha_3,\ \alpha_4),$$

于是 $\phi_0 = \alpha_1 + \alpha_5 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$，故

$$\phi_0' = 2\alpha_1' + 3\alpha_2' + 2\alpha_3 + \alpha_6.$$

$\mathrm{ad}_{V_0}\mathrm{u}_0$ 的扩充图为



即 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 是表示 $\gamma_1(F_4)$.

对以上情况，有 $\rho \approx \rho^*$, $T(\rho)$ 分别为 $4l$, $2(l-1)$, $2(l-1)$, 16. 故 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 均是第一类型的不可约表示. □

3.15 第一类实单李代数

实单李代数按其复化是否为单李代数可以分为两种类型.

定义 1 实单李代数 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^C$ 为复单李代数，则称 $\mathfrak{g}$ 为 **第一类实单李代数**, 否则，称为 **第二类实单李代数**.

设实单李代数 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^C$ 的紧致实形式为 $\mathfrak{u}$, 则 $\mathfrak{g}$ 为第一类实单李代数当且仅当 $\mathfrak{u}$ 是紧单李代数. 因而，研究第一类实单李代数，只要讨论紧单李代数的对合自同构.

设 $\mathfrak{u}$ 是紧单李代数，$\mathfrak{h}$ 为其 Cartan 子代数. Δ, Π 分别为根系与素根系. 其首根为:

$$\phi = \sum_{\alpha\in\Pi} m_\phi(\alpha)\alpha. \tag{3.5.1}$$

$\mathfrak{u}$ 的任一对合自同构，在共轭意义下可以写成

$$t = t_0 e^{\mathrm{ad}\,H}. \tag{3.5.2}$$

其中 t_0 是正则对合自同构. $H \in \mathfrak{h}_0 = \{H \in \mathfrak{h} | t_0(H) = H\}$.

对 $\alpha \in \Delta$, 记 $\alpha' = \alpha|_{\mathfrak{h}_0}$, 则 H 还可进一步限制使得它满足下列条件: 可找到某个 $\alpha \in \Pi$, 满足

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha, \\ m_\phi(\alpha) = 1 \text{ 或 } 2. \end{cases} \tag{3.5.3}$$

对此 α, 有

$$(H,\ \alpha)=\frac{1}{2};\quad (H,\ \beta')=0,\ \beta\in\Pi\setminus\{\alpha\}. \tag{3.5.4}$$

以下 Π', Δ_1, Δ_2, Δ_1', Δ_2', Δ_0, Δ_c, Δ_n 等均如 3.4 中所述. 如

$$\phi_0=\sum_{\alpha\in\Pi} r_{\phi_0}(\alpha)\alpha \tag{3.5.5}$$

为 Δ_2 内的最高根, 以

$$\phi_0'=\sum_{\alpha\in\Pi'} r'_{\phi_0'}(\alpha')\alpha' \tag{3.5.6}$$

为不可约表示的 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 的首权. 又令

$$\phi'=\sum_{\alpha'\in\Pi'} m'_{\phi'}(\alpha')\alpha'. \tag{3.5.7}$$

引理 1 假设 $t_0\neq I$, 则有下列结论:

(1) $0<r'_{\phi_0'}(\alpha')\le m'_{\phi'}(\alpha')\le r'_{\phi_0'}(\alpha')+1$,

(2) 若 α 满足 (3.5.3), 则 $r'_{\phi_0'}(\alpha')=1$,

(3) $2r'_{\phi_0'}(\alpha')-m'_{\phi'}(\alpha')\ge 0$.

而且当 α 满足 (3.5.3) 且 $m_\phi(\alpha)=2$ 时等号才成立. 当 $m_\phi(\alpha)=1$ 时, $2r'_{\phi_0'}(\alpha')-m'_{\phi'}(\alpha')=1$.

证 由 $t_0\neq I$, 知 $\mathfrak{u}$ 只能为 A_l, D_l 与 E_6. 而且满足 (3.5.3) 式的 α 只能是 A_{2m-1} 中的 α_m; D_l 中的 α_1, α_2, $\ldots$, α_{l-1}; E_6 中的 α_6. 在 3.4 已算出 ϕ' 与 ϕ_0'.

$$\begin{aligned} A_{2m-1}:\ \ &\phi'=2(\alpha_1'+\cdots+\alpha_{m-1}')+\alpha_m\\ &\phi_0'=\alpha_1'+2(\alpha_2'+\cdots+\alpha_{m-1}')+\alpha_m\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_l: \quad & \phi' = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha'_{l-1}) \\
& \phi'_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha'_{l-1} \\
E_6: \quad & \phi' = 2\alpha'_1 + 4\alpha'_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_6 \\
& \phi'_0 = 2\alpha'_1 + 3\alpha'_2 + 2\alpha_3 + \alpha_6
\end{aligned}
$$

比较 ϕ' 与 ϕ'_0 的系数就可以看出引理成立. □

命题 1 设 $t_0 \neq I$, $\mathfrak{u}_1$ 为 (3.5.2) 中 t 的特征子代数. $\alpha \in \Pi$, 满足 (3.5.3). 给定 $\Pi \backslash \{\alpha\}$ 一个次序记为 $\{\alpha'_2, \ldots, \alpha'_\lambda\}$. 则 $\{\alpha'_2, \ldots, \alpha'_\lambda, -\phi'_0\}$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的一组素根系. 且 $\mathrm{ad}_{V_1}\mathfrak{u}_1$ 的一个不可约表示的首权是 $-\alpha$.

证 由 3.4 的引理 1 知 $\beta \in \Pi$, 但 $\beta \neq \alpha$.

若 $\beta' \neq \beta$, 则 $\beta \in \Delta_1 \cap \Delta_2$, 即 $\beta' \in \Delta'_1$.

若 $\beta' = \beta$, 由

$$
t(X_\beta) = t_0 e^{\mathrm{ad}\, H} X_\beta = t_0 e^{2\pi i (H,\ \beta)} X_\beta = X_\beta,
$$

得 $\beta \in \Delta_1$, 即 $\beta \in \Delta'_1$.

又 $\phi_0 \in \Delta$, 而 $\phi'_0 \neq \phi_0$. 故 $\phi'_0 \in \Delta'_1$. 即 $\{\alpha'_2, \ldots, \alpha'_\lambda, -\phi'_0\}$ 均是 $\mathfrak{u}_1$ 的根. 又 $\alpha' = \alpha$, $(H,\ \alpha) = \frac{1}{2}$. 故

$$
t(X_\alpha) = t_0 e^{\pi i} X_\alpha = -X_{t(\alpha)} = -X_\alpha.
$$

故 α 与 $-\alpha$ 均是 $\mathrm{ad}_{V_1}\mathfrak{u}_1$ 的权.

又 $r'_{\phi'_0}(\alpha') = 1$. 故 $\alpha'_2, \ldots, \alpha'_\lambda, -\phi'_0$ 是线性无关的. 故只要证明, 对任一 $\beta' \in \Delta'_1$, 都可用 $\alpha'_2, \ldots, \alpha'_\lambda, -\phi'_0$ 线性表出, 而且系数或全非负或全非正. 为方便计以 α'_1 表示 α. 则对 $\beta' \in \Delta'_1$, 有

$$
\beta' = \pm(n_1\alpha'_1 + n_2\alpha'_2 + \cdots + n_\lambda\alpha'_\lambda),\ n_i \geq 0 \text{ 整数}.
$$

若 $n_1 = 0$, 则无须证明.

若 $n_1=1$, 由 $\beta'\in\Delta_1'$, 故 $\beta\in\Delta_1=\Delta_0\cup\Delta_c$. 此时分两种情形.

(1) $\beta\in\Delta_0$, 则 β' 亦为 $\mathfrak{u}_0$ 的表示 $\operatorname{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 的权.

(2) 若 $\beta\in\Delta_c$, 则 $\beta'=\beta$, $t(X_\beta)=X_\beta$. 由于 $n_1=1$, 故有

$$\begin{aligned} X_\beta &= t(X_\beta) \\ &= e^{2\pi i(\beta',\ H)}t_0(X_\beta)=e^{2\pi i(\alpha,\ H)}t_0(X_\beta) \\ &= -t_0(X_\beta). \end{aligned}$$

故 β 亦为 $\mathfrak{u}_0$ 的表示 $\operatorname{ad}_{V_0}\mathfrak{u}_0$ 的权, 而 ϕ_0' 为此表示的首权. 故有

$$\beta'=\pm(\phi_0'-s_1\alpha_1'-\cdots-s_\lambda\alpha_\lambda'),$$

其中 $0\le s_k\le r'_{\phi_0'}(\alpha_i')$, 由 $r'_{\phi_0'}(\alpha')=1$, 故 $s_1\le 1$.

若 $s_1=0$, 显然满足所需要的条件.

若 $s_1=1$, 则

$$\beta'=\pm\sum_{i=2}^{\lambda}(r'_{\phi_0'}(\alpha_i')-s_i)\alpha_i'$$

也满足所需要的条件.

若 $n_1=2$, 由 $n_1\le m_{\phi'}(\alpha')$ 及条件 (3.5.3) 知 $m_{\phi'}(\alpha')=2$, 即 $m_\phi(\alpha)=2$. 此时有

$$\beta'=\pm(\phi'-s_1\alpha_1'-\cdots-s_\lambda\alpha_\lambda'),$$

其中 $s_i\ge 0$ 整数, 且 $s_i\le m_{\phi'}(\alpha_i')$. 由 $n_1=2$, $m_{\phi'}(\alpha')=2$, 及 $\alpha_1',\ \ldots,\ \alpha_\lambda'$ 的线性无关性, 知 $s_1=0$. 即有

$$\beta'=\pm(\phi'-s_2\alpha_2'-\cdots-s_\lambda\alpha_\lambda').$$

又由引理 1 之 (3) 知 $\phi' = 2\phi_0' - \sum\limits_{i=2}^{\lambda} t_i\alpha_i'$. 故

$$\beta' = \pm\left(\sum_{i=2}^{\lambda}(t_i + s_i)\alpha_i' - 2\phi_0\right).$$

综合以上知 $\{\alpha_2', \ldots, \alpha_\lambda', -\phi_0'\}$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的一组素根系.

现证 $-\alpha$ 是 $\mathrm{ad}_{V_1}\mathfrak{u}_1$ 的首权. 显然, 对于素根系 $\{\alpha_2', \ldots, \alpha_\lambda', -\phi_0'\}$ 是正权. 故只需证明 $-\alpha + \alpha_k'$, $-\alpha - \phi_0'$ 均不是 $\mathrm{ad}_{V_1^C}\mathfrak{u}_1$ 的权.

若 $-\alpha + \alpha_k'$ 是权, 则必为 Δ 内某根的诱导. 由 3.2 的引理 2, 有

$$-\alpha + \alpha_k' = \pm\sum_{1}^{\lambda} s_i\alpha_i', \quad s_i \geq 0, \quad \alpha_1' = \alpha.$$

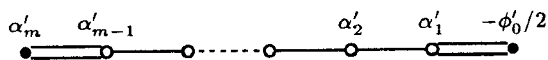
由 α, α_2', $\ldots$, α_λ' 线性无关, 故知 $1 \pm s_1 = 0$, $-1 \pm s_k = 0$. 故 s_1, s_k 中有一个为 -1, 矛盾. 因而 $-\alpha + \alpha_k'$ 不是权.

若 $-\alpha - \phi_0'$ 是权, 由 α, $\phi_0' \in \Delta_2'$, 故 $-\alpha - \phi_0' \in \Delta_2'$. 但 ϕ_0' 是 $\Delta_2^{0'}$ 中最高根. 故 $\alpha + \phi_0' \notin \Delta_2^{0'}$, 即 $-\alpha - \phi_0' \notin \Delta_2^{0'}$. 因 $\Delta_2^{0'} = \Delta_n^{0'} \cup \Delta_0^{0'} = \Delta_n^{0'} \cup \Delta_0{}'$, 故 $-\alpha - \phi_0' \notin \Delta_0'$, 因此 $-\alpha - \phi_0' \in \Delta_2' \setminus \Delta_0' = \Delta_n'$, 于是 $-\alpha - \phi_0' = -(\alpha + \phi_0)' = -(\alpha + \phi_0)$. 即 $t(\alpha + \phi_0) = \alpha + \phi_0$, 故 $t(\phi_0) = \phi_0$. 这与 $t(\phi_0) \neq \phi_0$ 矛盾. 故 $-\alpha - \phi_0'$ 非权.

注 从正则特征子代数的扩充图也可看出 $-\alpha - \phi_0'$ 不是根.

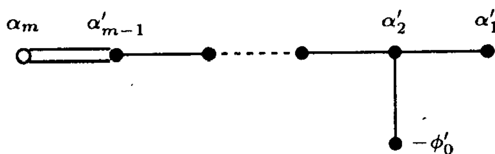
从此命题可以确定 $t_0 \neq I$ 的所有 $\mathfrak{u}_1$ 的结构如下:

A_{2m}. $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}\}$, $t\alpha_i = \alpha_{2m-i+1}$. 故无 α_i 满足 $t\alpha = \alpha$, 因而 $t = t_0$. 只有唯一的 $\mathfrak{u}_0$. 扩充图为



$\mathfrak{u}_0 = B_m$, 表示是 $\gamma_1^2(b_m)$.

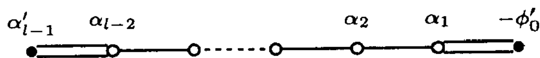
A_{2m-1}: $\mathfrak{u}_0 = C_m$, 表示 $\gamma_2(C_m)$. 图为



此外还有

$$\alpha = \alpha_m,\ \ \mathfrak{u}_1 = D_m,\ \ \text{表示是}\ \gamma_1^2(D_m).$$

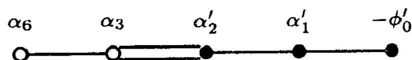
D_l: $\mathfrak{u}_0 = B_{l-1}$, 表示为 $\gamma_1(B_{l-1})$, 图为



此外还有

$$\alpha = \alpha_i,\ 1 \le i \le l-2,$$
$$\mathfrak{u}_1 = B_i \times B_{l-i-1},$$
$$\text{表示}\ \gamma_1(B_i) \times \gamma_1(B_{l-i+-1}).$$

E_6: $\mathfrak{u}_0 = F_4$, 表示 $\gamma_1(F_4)$, 图为



此外有

$$\alpha=\alpha_6,\ \ \mathfrak{u}_1=C_4,\ \text{表示}\ \gamma_4(F_4).$$

命题 2 设 $t_0=I$. $\mathfrak{u}_1$ 是 $t=e^{\operatorname{ad}H}$ 的特征子代数.

(1) 若 α 满足 (3.5.3), (3.5.4) 且 $m_\phi(\alpha)=1$. 则 $\Pi\setminus\{\alpha\}$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的素根系, 且 $\operatorname{ad}_{V_1^C}\mathfrak{u}_1$ 有两个首权 ϕ 与 $-\alpha$.

(2) 若 α 满足 (3.5.3), (3.5.4) 且 $m_\phi(\alpha)=2$. 则 $(\Pi\setminus\{\alpha\})\cup\{-\phi\}$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的素根系. 且 $\operatorname{ad}_{V_1^C}\mathfrak{u}_1$ 只有一个首权 $-\alpha$.

证 因 $t_0=I$, 故 $\phi_0=0$.

(1) $m_\phi(\alpha)=1$, 即

$$\phi=\alpha+\sum_{\beta\in\Pi\setminus\{\alpha\}}m_\phi(\beta)\beta.$$

$\mathfrak{u}_1$ 的任一根 ψ 必可写作

$$\psi=\pm(\sum k_\psi(\beta)\beta),\ \ k_\psi(\beta)\le m_\phi(\beta).$$

若 $k_\psi(\alpha)=0$, 则无须证明.

若 $k_\psi(\alpha)=1$, 则

$$t(X_\psi)=e^{2\pi i(\psi,H)}X_\psi=-X_\psi.$$

故 ψ 不是 $\mathfrak{u}_1$ 的根. 故 $\Pi\setminus\{\alpha\}$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的素根系.

下面证明 $-\alpha$, ϕ 是首权. 因为 $-\alpha+\alpha_k$, $\alpha_k\in\Pi\setminus\{\alpha\}$ 不是 $\mathfrak{u}$ 的根, 故不是 $\operatorname{ad}_{V_1}\mathfrak{u}_1$ 的权. 而 $\phi+\alpha_k$ 亦不是根. 故 $-\alpha$, ϕ 均是首权. 故 $\operatorname{ad}_{V_1}\mathfrak{u}_1$ 是第二类型的.

(2) $m_\phi(\alpha)=2$. 则

$$\begin{aligned}\phi&=2\alpha+\sum_{\beta\neq\alpha}m_\phi(\beta)\beta,\\ \psi&=\pm\sum_{\beta\in\Pi}k_\psi(\beta)\beta,\ \ k_\psi(\beta)\le m_\phi(\beta).\end{aligned}$$

若 $k_\psi(\alpha)=0$, 则无须证明.

若 $k_\psi(\alpha)=1$, 则 $t(X_\psi)=-X_\psi$. 故 ψ 不是 $\mathfrak{u}_1$ 的根.

若 $k_\psi(\alpha)=2$, 则 $t(X_\psi)=X_\psi$, ψ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的根. 但此时有

$$2\alpha=\phi-\sum_{\beta\neq\alpha}m_\psi(\beta)\beta.$$

故

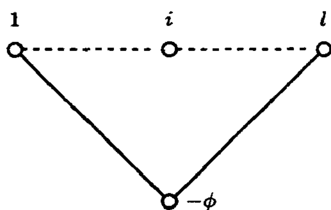
$$\begin{aligned}\psi &=\pm\left(\phi-\sum m_\phi(\beta)\beta+\sum_{\beta\neq\alpha}k_\psi(\beta)\beta\right)\\ &=\mp\left(-\phi+\sum_{\beta\neq\alpha}(m_\phi(\beta)-k_\psi(\beta))\beta\right)\end{aligned}$$

故 $(\Pi\setminus\{\alpha\})\cup\{-\phi\}$ 是 $\mathfrak{u}_1$ 的素根系.

因 $-\phi-\alpha$, $-\alpha+\alpha_k$ 均不是根. 故不是 $\operatorname{ad}_{V_1}\mathfrak{u}_1$ 的权. 因而 $-\alpha$ 是首权. □

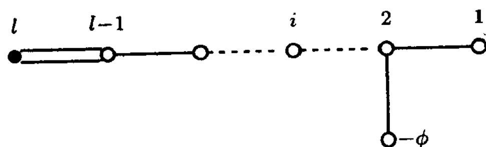
由 $\operatorname{rank}\mathfrak{u}_1=\operatorname{rank}\mathfrak{u}$. 知在 (1) 时 $\mathfrak{u}_1$ 有一维中心 T. 由命题 2 可得到 $t=e^{\operatorname{ad}H}$ 的特征子代数的扩充图如下.

1. A_l: $\phi=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l$, 图为



取 $\alpha=\alpha_i$, $\mathfrak{u}_1=T\times A_{i-1}\times A_{l-i}$, 表示为 $T\times\gamma_1(A_{i-1})\times\gamma_1(A_{l-i})$.

2. B_l: $\phi=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_l$, 图为



此时，有

$$\alpha=\alpha_1,\quad \mathfrak{u}_1=T\times B_{l-1},$$

表示为 $T\times\gamma_1(B_{l-1})$;

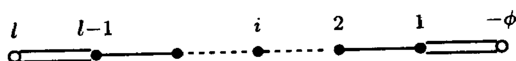
$$\alpha=\alpha_i,\ 2\le i\le l-1,$$
$$\mathfrak{u}_1=B_{l-i}\times D_i,$$

表示为 $\gamma_1(B_{l-i})\times\gamma_1(D_i)$;

$$\alpha=\alpha_l,\quad \mathfrak{u}_1=D_l,$$

表示为 $\gamma_1^2(D_l)$

3. C_l: $\phi=2\alpha_1+\cdots+2\alpha_{l-1}+\alpha_l$, 图为



此时，有

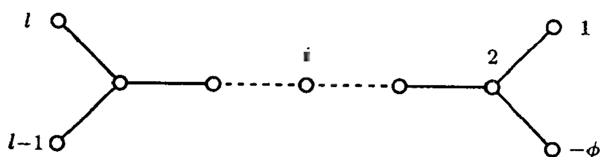
$$\alpha=\alpha_l,\ \mathfrak{u}_1=T\times A_{l-1},\ \text{表示为}\ T\times\gamma_1^2(A_{l-1}),$$

及

$$\alpha=\alpha_i,\ 1\le i\le l-1;$$
$$\mathfrak{u}_1=C_{l-i}\times C_i,$$

表示为 $\gamma_1(C_{l-i})\times\gamma_1(C_i)$.

4. D_l: $\phi=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{l-2}+\alpha_{l-1}+\alpha_l$, 图为



此时，有

$$\alpha=\alpha_{l-1},\ \alpha_l,$$
$$u_1=A_{l-1}\times T,$$

表示为 $\gamma_2(A_{l-1})\times T$;

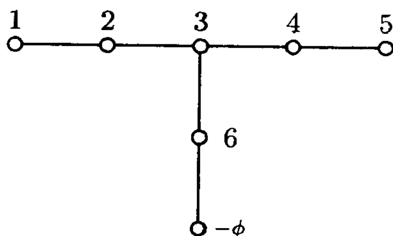
$$\alpha=\alpha_1,$$
$$u_1=D_{l-1}\times T,$$

表示为 $\gamma(D_{l-1})\times T$;

$$\alpha=\alpha_i, 2\leq i\leq l-2,$$
$$u_1=D_i\times D_{l-i},$$

表示为 $\gamma_1(D_i)\times\gamma_1(D_{l-i})$.

5. E_6: $\phi=\alpha_1+\alpha_5+2(\alpha_2+\alpha_4)+3\alpha_3+2\alpha_6$, 图为



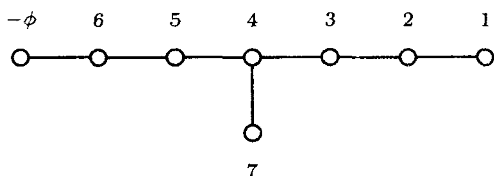
此时，有

$\alpha=\alpha_1$, $\alpha_5, u_1=D_5\times T$, 表示为 $\gamma_5(D_5)\times T$

及

$\alpha = \alpha_2$, α_4, $\alpha_6, \mathrm{u}_1 = A_1 \times A_5$, 表示为 $\gamma_1(A_1) \times \gamma_3(A_5)$

6. E_7: $\phi = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7$, 图为



此时，有

$\alpha = \alpha_1$,

$\mathrm{u}_1 = E_6 \times T$,

$\gamma_1(E_6) \times T$;

$\alpha = \alpha_2$, α_6,

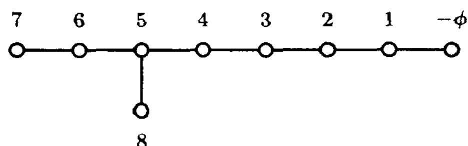
$\mathrm{u}_1 = A_1 \times D_6$,

表示为 $\gamma_1(A_1) \times \gamma_6(D_6)$;

$\alpha = \alpha_7$, $\mathrm{u}_1 = A_7$,

表示为 $\gamma_4(A_7)$.

7. E_8: $\phi = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8$, 图为



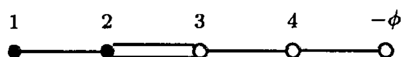
此时，有

$$\alpha = \alpha_1,\ \mathrm{u}_1 = A_1 \times E_7,\ 表示为\ \gamma_1(A_1) \times \gamma_1(E_7);$$

及

$$\alpha = \alpha_7,\ \mathrm{u}_1 = D_8,\ 表示为\ \gamma_8(D_8).$$

8. F_4: $\phi = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$, 图为



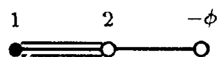
此时，有

$$\alpha = \alpha_1, \mathrm{u}_1 = B_4,\ 表示为\ \gamma_4(B_4);$$

及

$$\alpha = \alpha_4,\ \mathrm{u}_1 = A_1 \times C_3,\ 表示为\ \gamma_1(A_1) \times \gamma_3(C_3).$$

9. G_2: $\phi = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$, 图为



此时，有

$$\alpha = \alpha_1,\ \mathrm{u}_1 = A_1 \times A_1,\ 表示为\ \gamma_1(A_1) \times \gamma_1^3(A_1).$$

3.16 第二类实单李代数

前节讨论了第一类型的实单李代数. 下面讨论第二类型的实单李代数.

定理 1 设 $\mathfrak{g}_0$ 为是第二类型的实单李代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}}$ 为其复化, 对应的共轭为 σ. $\mathfrak{G}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的任一单理想, 则有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1)$$

为 $\mathfrak{g}$ 的单理想直和分解, 且 $\mathfrak{g}_1 \approx \sigma(\mathfrak{g}_1)$.

证 设 $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的单理想. 于是 $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ 也是单理想. 故 $\mathfrak{g}_1 \cap \sigma(\mathfrak{g}_1) = \{0\}$ 或 $\mathfrak{g}_1 = \sigma(\mathfrak{g}_1)$. 若非 0, 由 $\sigma(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1$, 知 $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_0$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的理想, $(\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_0)^{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}_1$. $\mathfrak{g}_0$ 单, 故 $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0$. 故 $\mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_0$ 第二类型矛盾. 故 $\mathfrak{g}_1 \cap \sigma(\mathfrak{g}_1) = \{0\}$. 此时

$$\sigma(\mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1)) = \mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1).$$

于是 $(\mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1)) \cap \mathfrak{g}_0$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的非零理想, 故为 $\mathfrak{g}_0$. 因而有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1).$$

设 X_1, X_2, $\ldots$, X_n 是 $\mathfrak{g}_1$ 的紧实形式 $\mathfrak{g}_{1u}$ 的一组基, 故也是 $\mathfrak{g}_1$ 的一组基. 于是有

$$[X_i,\ X_j] = \sum c_{ij}^k X_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbf{R}.$$

自然 $\sigma(X_1), \sigma(x_2), \cdots, \sigma(X_i)$ 为 $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ 的一组基, 且

$$\begin{aligned}[\sigma X_i,\ \sigma X_j] &= \sigma([X_i,\ X_j]) = \sigma(\sum c_{ij}^k X_k) \\ &= \sum c_{ij}^k \sigma(X_k).\end{aligned}$$

由此可知，由

$$\rho\left(\sum a_i X_i\right) = \sum a_i \sigma(X_i),\ a_i \in \mathbf{C}$$

定义的 $\rho:\ \mathfrak{g}_1 \to \sigma(\mathfrak{g}_1)$ 是同构映射，即 $\sigma(\mathfrak{g}_1) \approx \mathfrak{g}_1$. □

定理 2 设 $\mathfrak{g}_0$ 为是第二类型的实单李代数.

1) 存在 $\mathfrak{g}_0$ 的容许复结构 J, 即 J 满足

$$[J(X),\ J(Y)] = -[X,\ Y],$$
$$J([X,\ Y]) = [J(X),\ Y] = [X,\ J(Y)].$$

2) 如果定义 $\mathfrak{g}_0$ 与 $\mathbf{C}$ 的乘积为

$$(a + b\sqrt{-1})X = aX + bJX,\ \ \forall X \in \mathfrak{g}_0,\ \ a,\ b \in \mathbf{R},$$

则 $\mathfrak{g}_0$ 为一复李代数 $\tilde{\mathfrak{g}_0}$ 且 $\tilde{\mathfrak{g}_0} \approx \mathfrak{g}_1$.

证 1) 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}}$. 由定理 1 知

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1).$$

定义 J 如下：

$$J(X_1 + X_2) = \sqrt{-1}X_1 - \sqrt{-1}X_2,\quad X_1 \in \mathfrak{g}_1,\ X_2 \in \sigma(\mathfrak{g}_1).$$

则容易证明

$$J^2 = -I,\quad J\sigma = \sigma J.$$

即 J 为线性空间 $\mathfrak{g}_0$ 的容许复结构.

设 $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, 这里 $X_1,\ Y_1 \in \mathfrak{g}_1$; $X_2,\ Y_2 \in \sigma(\mathfrak{g}_1)$. 由 $[\mathfrak{g}_1,\ \sigma(\mathfrak{g}_1)] = 0$. 于是有

$$\begin{aligned}[J(X),\ J(Y)] &= [\sqrt{-1}X_1 - \sqrt{-1}X_2,\ \sqrt{-1}Y_1 - \sqrt{-1}Y_2] \\ &= -[X,\ Y].\end{aligned}$$

因而

$$
\begin{aligned}
[X,\ J(Y)] &= -[J^2X,\ JY] = [JX,\ Y], \\
[X,\ J(Y)] &= [X_1 + X_2,\ \sqrt{-1}Y_1 - \sqrt{-1}Y_2] \\
&= \sqrt{-1}[X_1,\ Y_1] - \sqrt{-1}[X_2,\ Y_2] \\
&= J[X_1,\ Y_1] + J[X_2,\ Y_2] \\
&= J([X,\ Y]).
\end{aligned}
$$

2) 首先证明 $\tilde{\mathfrak{g}_0}$ 为复线性空间，只要证

$$
\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X,\ \forall\alpha,\ \beta \in \mathbf{C},\ X \in \mathfrak{g}_0.
$$

设 $\alpha = a + \sqrt{-1}b$, $\beta = c + \sqrt{-1}d$, 于是

$$
\begin{aligned}
\alpha(\beta X) &= (a + \sqrt{-1}b)(cX + dJX) \\
&= a(cX + dJX) + bJ(cX + dJX) \\
&= (ac - bd)X + (ad + bc)JX \\
&= [(ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}]X \\
&= (\alpha\beta)X.
\end{aligned}
$$

其次，证明 $\tilde{\mathfrak{g}_0}$ 为复李代数，只要证明

$$
[\alpha X,\ \beta Y] = \alpha\beta[X,\ Y]
$$

即可.

$$
\begin{aligned}
&[aX + bJY,\ cY + dJY] \\
&= ac[X,\ Y] + bd[JX,\ JY] + bc[JX,\ Y] + ad[X,\ JY] \\
&= (ac - bd)[X,\ Y] + (ad + bc)J[X,\ Y] \\
&= (\alpha\beta)[X,\ Y].
\end{aligned}
$$

因而 $\tilde{\mathfrak{g}_0}$ 是复李代数.

最后，证明 $\tilde{\mathfrak{g}_0}$ 与 $\mathfrak{g}_1$ 同构.

若 X_1, x_2, $\ldots$, X_m 是 $\tilde{\mathfrak{g}_0}$ 的一组基. 则

$$X_1,\ x_2,\ \ldots,\ X_m,\ JX_1,\ Jx_2,\ \ldots,\ JX_m$$

是 $\mathfrak{g}_0$ 的一组基. 因而 $\{X_i - \sqrt{-1}JX_i\}$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的一组基. 注意到

$$\begin{aligned}
&[X_i - \sqrt{-1}JX_i,\ X_j - \sqrt{-1}JX_j] \\
=& [X_i,\ X_j] - [JX_i,\ JX_j] \\
&-\sqrt{-1}[X_i,\ JX_j] - \sqrt{-1}[JX_i,\ X_j] \\
=& 2([X_i,\ X_j] - \sqrt{-1}J[X_i,\ X_j]),
\end{aligned}$$

可知 $\tilde{\mathfrak{g}_0}$ 与 $\mathfrak{g}_1$ 同构. □

定理 3 设 $\mathfrak{g}$ 是一个复单李代数，则

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^R$$

是第二类实单李代数.

证 由 1.1 的定理 4 知 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^R$ 是实半单李代数，且有正则复结构 J:

$$J(X) = \sqrt{-1}X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}\,(= \mathfrak{g}_0).$$

J 满足

$$[J(X),\ J(Y)] = -[X,\ Y],$$

$$J([X,\ Y]) = [J(X),\ Y] = [X,\ J(Y)].$$

显然， J 可扩充为 $\mathfrak{g}_0^C$ 的线性变换. 令

$$\mathfrak{g}_1 = \{X \in \mathfrak{g}_0^C \mid J(X) = \sqrt{-1}X\}.$$

由

$$J([X, Y]) = [J(X), Y] = \sqrt{-1}[X, Y], \forall X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_0^C,$$

知 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}_0^C$ 的非平凡理想. 即 $\mathfrak{g}_0^C$ 不是单李代数.

设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个非零理想. 则 $\mathfrak{a}+J(\mathfrak{a})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 (复) 子空间. 而且 $J(\mathfrak{a}) = J([\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}]) = [J(\mathfrak{g}_0), \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$. 于是 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}+J(\mathfrak{a})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非零 (复) 理想. 因而 $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$. 故 $\mathfrak{g}^R$ 是第二类实单李代数. □

前面定理说明第二类实单李代数实际上是将一个复单李代数看成实李代数. 因此, 本节给出了第二类实单李代数的分类.

3.17 分类定理

本节将完成非紧实单李代数的分类. 只须讨论第一类实单李代数的分类. 为此先证明两个实表示的定理.

命题 1 紧李代数的实不可约表示等价的充分必要条件是它们属于同一类型且复化的分量是等价的.

证 必要性是显然的, 只需证明充分性. 分两种情况.

(1) 设 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ 是第一类型的, $\gamma: V_2^C \to V_1^C$ 是 ρ_1^C, ρ_2^C 的等价对应. 则

$$\rho_2^C = \gamma^{-1}\rho_1^C\gamma.$$

从 $\bar{\rho}_k^C = \rho_k^C$, 有

$$\rho_2^C = \bar{\gamma}^{-1}\rho_1^C\bar{\gamma} = \bar{\gamma}^{-1}\gamma\rho_2^C\gamma^{-1}\bar{\gamma}.$$

由于 ρ_2^C 不可约, 由 Schur 引理有 $\bar{\gamma}\gamma^{-1} = cI$ (纯量变换). 故 $\bar{\gamma} = c\gamma$, 因而

$$\gamma = \bar{c}\bar{\gamma} = \bar{c}c\gamma.$$

而 $\bar{c}c=1$. 故 $c=e^{i\varphi}$. 令 $\gamma'=e^{\frac{i\varphi}{2}}\gamma$, 则

$$\overline{\gamma'}=e^{-\frac{i\varphi}{2}}\bar{\gamma}=\bar{c}\gamma e^{\frac{i\varphi}{2}}=e^{\frac{i\varphi}{2}}\gamma=\gamma',$$

即 γ' 是实的. 故 γ' : $V_2\to V_1$. 显然

$$\rho_2=\gamma^{-1}\rho_1\gamma=e^{-\frac{i\varphi}{2}}\gamma^{-1}\rho_1\gamma e^{\frac{i\varphi}{2}}=\gamma'^{-1}\rho_1\gamma'.$$

即 ρ_1 与 ρ_2 等价.

(2) 若 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) 是第二类型, 则

$$V_1^C=V_1'\dot{+}\bar{V}_1',\quad V_2^C=V_2'\dot{+}\bar{V}_2'$$

且

$$(\rho_1', V_1')\approx(\rho_2', V_2'),\quad (\bar{\rho}_1', \bar{V}_1')\approx(\bar{\rho}_2', \bar{V}_2').$$

因而有 γ : $V_1'\to V_2'$ 使得

$$\rho_2'=\gamma\rho_1'\gamma^{-1}.$$

设 γ' : $V_1^C\to V_2^C$ 满足

$$\gamma'x=\gamma x,\ x\in V_1';\ \ \gamma'x=\overline{\gamma\bar{x}},\ x\in\bar{V}_1'.$$

故 $\gamma'(V_1')=V_2'$, $\gamma'(\bar{V}_1')=\bar{V}_2'$. γ' 是 $V_1^C\to V_2^C$ 非奇异线性映射.

现在证明 $\bar{\gamma}'=\gamma'$. 设 x, $y\in V_1'$, 有

$$\bar{\gamma}'(x+\bar{y})=\overline{\gamma'(\bar{x}+y)}=\gamma'(x+\bar{y}).$$

又对任一 $u\in \mathrm{u}$, 自然有 $\rho_2(u)\gamma'x=\gamma'\rho_1(u)x$, $x\in V_1'$. 令 $x\in\bar{V}_1'$ 则

$$\rho_2(u)\gamma'x=\rho_2(u)\overline{\gamma\bar{x}}=\overline{\rho_2(u)\gamma\bar{x}}=\overline{\gamma\rho_1(u)\bar{x}}=\gamma'\rho_1(u)x,$$

即有 $\rho_2=\gamma'\rho_1\gamma'^{-1}$, ρ_1, ρ_2 等价. □

设 $(\rho,\ V)$ 是紧李代数 u 的一个实不可约表示. (x,y) 是 V 的不变双线性型. 可自然地扩充到 V^C 上: 即若 σ 是 V^C 中由 V 决定的共轭, 则 $(\bar{x},\bar{y})=\overline{(x,y)}$, 其中 $\bar{x}=\sigma x$. 此时 $H(x,\ y)=(x,\ \bar{y})$ 是 $(\rho^C,\ V^C)$ 的不变 Hermite 型. 若 $(x,\ y)$ 在 V 上正定, 则 $H(x,\ y)$ 正定.

令 V' 是 $(\rho^C,\ V^C)$ 的一个不变不可约子空间. 若 $(\rho,\ V)$ 为第一类型, 则 $V'=V^C$. 若为第二类型, 则 $V^C=V'\dot{+}\bar{V}'$.

引理 1 设 γ 是 V 的一个同构, 且 $\gamma(V')=V'$,

$$H(\gamma x,\ \gamma y)=H(x,\ y),\ \forall x,y\in V'.$$

则

$$(\gamma x,\ \gamma y)=(x,\ y),\forall x,y\in V.$$

证 若 ρ 是第一类型, 则 $V'=V^C$, 由 $\overline{\gamma y}=\gamma\bar{y}$, 因而有

$$(\gamma x,\ \gamma\bar{y})=H(\gamma x,\ \gamma y)=H(x,y)=(x,\bar{y}),$$

故 $(\gamma x,\ \gamma y)=(x,\ y),\ \forall x,y\in V$.

如果 ρ 是第二类型的, 则 $V^C=V'\dot{+}\bar{V}'$, 由 $\gamma(V')=V'$ 有 $\gamma(\bar{V}')=\bar{V}'$, 由于

$$H(\gamma x,\ \gamma y)=H(x,\ y),\ \forall x,y\in V',$$

故有

$$(\gamma x,\ \gamma\bar{y})=(x,\ \bar{y}),\quad \forall x,y\in V'.$$

故 $(\gamma\bar{y},\ \gamma x)=(\bar{y},x)$, 进而

$$H(\gamma\bar{y},\ \gamma\bar{x})=H(\bar{y},\ \bar{x}),\ \forall\bar{x},\bar{y}\in\bar{V}'.$$

由 3.3 的命题 2 知 V' 内不存在对称不变双线性型，因而有

$$(x,\ y)=0,\quad \forall x,y\in V',$$
$$(\bar{x},\ \bar{y})=0,\quad \forall \bar{x},\bar{y}\in \bar{V}'.$$

因而对 $x=x_1+\bar{x}_2$, $y=y_1+\bar{y}_2$, $x_1,x_2,y_1,y_2\in V'$ 有

$$\begin{aligned}(\gamma x,\ \gamma y) &= (\gamma x_1+\gamma\bar{x}_2, \gamma y_1+\gamma\bar{y}_2)\\ &= H(\gamma x_1,\ \gamma y_2)+H(\gamma\bar{x}_2,\ \gamma\bar{y}_1)\\ &= (x_1,\ \bar{y}_2)+(\bar{x}_2,\ y_1)\\ &= (x,\ y).\end{aligned}$$

引理也成立. □

命题 2 设 $(\rho_1,\ V_1)$, $(\rho_2,\ V_2)$ 是 $\mathfrak{u}$ 的两个等价的不可约实表示, $(x_1,\ y_1)_1$, $(x_2,\ y_2)_2$ 分别是 V_1, V_2 上的不变双线性型，则可选取等价对应 γ, 使得

$$(\gamma x,\ \gamma y)_2=(x,\ y)_1.$$

证 设 H_1, H_2 分别为对应的 Hermite 型，由引理 1 不难证明，若 V_1 上另有不变双线性型 $(x,\ y)_1'$, 其对应的 Hermite 型满足 $H_1'(x,\ y)=H(x,\ y)$, $\forall x,\ y\in V_1'$, 则 $(x,\ y)_1'=(x,\ y)_1$. 因而只须证明可找到 ρ_2, ρ_1 的等价对应 γ_0, 使得

$$H_2(\gamma_0 x,\ \gamma_0 y)=H_1(x,\ y),\ \forall x,y\in V_1'$$

成立.

令 $\gamma:\ V_1\to V_2$ 是等价对应，其复化仍以 γ 表示之. $\gamma(V_1')=V_2'$, $\gamma(\bar{V}_1')=\bar{V}_2'$. 定义 γ 的转置 ${}^t\gamma$: $V_2^C\to V_1^C$, 使得

$$H_2(\gamma x,\ y)=H_1(x,\ {}^t\gamma y),\ x\in V_1^C,\ y\in V_2^C.$$

类似可定义 $\rho_1(u)$, $\rho_2(u)$ $(u \in \mathfrak{u})$ 的转置 ${}^t\phi_1(u)$, ${}^t\rho_2(u)$. 由

$$\rho_2(u) \cdot \gamma = \gamma \cdot \rho_1(u),$$

可得

$$\begin{aligned} & H_1(x,\ {}^t\rho_1(u) \cdot {}^t\gamma y) \\ &= H_2(\gamma \cdot \rho_1(u)x,\ y) = H_2(\rho_2(u) \cdot \gamma x,\ y) \\ &= H_2(\gamma x,\ {}^t\rho_2(u)y) = H_1(x,\ {}^t\gamma\, {}^t\rho_2(u)y). \end{aligned}$$

故 ${}^t\gamma \cdot {}^t\rho_2(u) = {}^t\rho_1(u) \cdot {}^t\gamma$. 又因为 $\rho_k(u)$ 令 $H_k(x,\ y)$ 不变，故有

$${}^t\rho_k(u) = -\rho_k(u), \quad k = 1,\ 2.$$

于是 $\forall u \in \mathfrak{u}$, 有

$$\begin{aligned} & \rho_1(u)\, {}^t\gamma = {}^t\gamma\rho_2(u), \\ & \rho_1(u)\, {}^t\gamma \cdot \gamma = {}^t\gamma\rho_2(u)\gamma = {}^t\gamma \cdot \gamma \cdot \rho_1(u). \end{aligned}$$

由于 ρ_1 在 V_1' 上不可约，故从 Schur 引理有

$${}^t\gamma \cdot \gamma = c\, I_{V_1'}.$$

又 $H_1({}^t\gamma \cdot \gamma x,\ y) = H_2(\gamma x,\ \gamma y)$ 是正定的．故 $c > 0$. 令

$$\gamma_0 = k\,\gamma, \quad k = \sqrt{\frac{1}{c}}.$$

则

$$\gamma_0(V_1) = V_2,\ \gamma_0(V_1') = V_2',\ \gamma_1(\bar{V}_1') = \bar{V}_2{}',$$

而且有

$$H_2(\gamma_0 x,\ \gamma_0 y) = H_1(x,\ t_{\gamma_0}\gamma_0 y).$$

对于 $x,\ y \in V_1'$ 则有 ${}^t\gamma_0\gamma_0 = I$, 故

$$H_2(\gamma_0 x,\ \gamma_0 y) = H_1(x,\ y),\ \forall x, y \in V_1'.$$

故 $(\gamma_0 x,\ \gamma_0 y)_2 = (x,\ y)_1, \forall x, y \in V_1.$ □

分类定理 设 $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_1'$ 是单纯紧致李代数 $\mathfrak{u}$ 的两个同构的特征子代数. 则 $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_1'$ 在 $\operatorname{Aut}\mathfrak{u}$ 下共轭.

证 设 $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \dot{+} V_1 = \mathfrak{u}_1' \dot{+} V_1'$, 由于 $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_1'$ 同构, 由 3.4, 3.5 知 $\operatorname{ad}_{V_1}\mathfrak{u}_1, \operatorname{ad}_{V_1'}\mathfrak{u}_1'$ 是等价的. 于是有 $\mathfrak{u}_1$ 到 $\mathfrak{u}_1'$ 的同构映射 ρ_1 与 V_1 到 V_1' 的非奇异线性映射 ρ_2 使得

$$\operatorname{ad}\rho_1(x)\cdot\rho_2(y) = \rho_2\cdot\operatorname{ad}x\cdot(y),\ x \in \mathfrak{u}_1, y \in V_1.$$

令 $\rho = \rho_1\cdot\rho_2$, 则 ρ 是 $\mathfrak{u}$ 上的非奇异线性变换. 由 ρ_1 同构, 有

$$\operatorname{ad}\rho_1(x)\cdot(\rho_1(x')) = \rho_1(\operatorname{ad}x\cdot x'),\ \forall x, x' \in \mathfrak{u}_1.$$

因而可以得到

$$\operatorname{ad}\rho(x)\cdot\rho = \rho\cdot\operatorname{ad}x,\ \forall x \in \mathfrak{u}_1.$$

设 $(x,\ y)$ 是 $\mathfrak{u}$ 的 Killing 型. 其在 $V_1,\ V_1'$ 上的诱导自然是表示 $\operatorname{ad}_{V_1}\mathfrak{u}_1, \operatorname{ad}_{V_1'}\mathfrak{u}'$ 的不变双线性型. 从命题 2 知, 可选取 ρ 使得

$$(\rho(y),\ \rho(z)) = (y,\ z),\ \forall y, z \in V_1.$$

又 $\forall x,\ x' \in \mathfrak{u}_1$,

$$\begin{aligned}(x,\ x') &= \operatorname{tr}(\rho^{-1}\operatorname{ad}\rho(x)\cdot\rho\cdot\rho^{-1}\operatorname{ad}\rho(x')\rho)\\ &= (\rho(x), \rho(x')),\end{aligned}$$

且 $(\mathfrak{u}_1,\ V_1) = 0$, $(\mathfrak{u}_1',\ V_1') = 0$. 故有

$$(\rho(x),\ \rho(y)) = (x,\ y),\ \forall x, y \in \mathfrak{u}.$$

又由 $(x,\ y)$ 对伴随表示不变性，对 $x \in \mathfrak{u}_1$，y，$y' \in V_1$ 有

$$
\begin{aligned}
&([\rho(y),\ \rho(y')],\ \rho(x)) = ([\rho(x),\ \rho(y)],\ \rho(y')) \\
&= (\mathrm{ad}\rho(x) \cdot \rho(y),\ \rho(y')) = (\rho(\mathrm{ad}\, x \cdot y),\ \rho(y')) \\
&= (\rho[x,\ y]),\ \rho(y')) = ([x,\ y],\ y') = ([y,\ y'],\ x) \\
&= (\rho[y,\ y'],\ \rho(x)).
\end{aligned}
$$

因 $[y,\ y'] \in \mathfrak{u}_1$, 故 $[\rho(y),\ \rho(y')] = \rho([y,\ y'])$. 因此

$$
[\rho(x),\ \rho(y)] = \rho([x,\ y]), \quad \forall x,\ y \in \mathfrak{u}.
$$

即 $\rho \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$. 且 $\rho(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}_1'$. □

由此分类定理立即得到 3.4, 3.5 的图完全决定了第一类实单李代数，第二类实单李代数则由 3.6 完全决定.

第四章　Satake 图

前一章我们用 T- 正常 Cartan 子代数的根系对第一类实单李代数进行了分类. 另一种分类的方法则是从正则 Cartan 子代数的根系来进行分类. 这种方法得到的图解称为 Satake 图. 本章我们将建立这两种图的关系.

4.18　约化 Weyl 群

设实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ 有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_o, \quad \mathfrak{g}_u = \mathfrak{k}_o + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_o.$$

σ, τ 及 $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$ 为对应的共轭及 Cartan 对合. $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的约化 Cartan 子代数, 即含于 $\mathfrak{p}_0$ 中的极大可换子代数. 又设 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}^+ + \mathfrak{a}$ 是有标准分解的正则 Cartan 子代数.

引理 1　令

$$G_0 = s^{\mathrm{ad}\mathfrak{g}_0}, \quad K_0 = e^{\mathrm{ad}\mathfrak{k}_0};$$

$$M = C_{K_0}(\mathfrak{a}) = \{k \in K_0 | k(H) = H, \ \forall H \in \mathfrak{a}\};$$

$$M' = N_{K_0}(\mathfrak{a}) = \{k \in K_0 | k(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}\}.$$

则有

(1) K_0 是 G_0 的紧子群. M' 为 K_0 的闭子群. M 为 M' 的闭正规子群.

(2) $\mathrm{Lie}M' = \mathrm{Lie}M = C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a}) = N_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})$.

(3) M'/M 是有限群. 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的 **约化 Weyl 群**, 记作 $W(\mathfrak{g}_0)$.

证 (1) $K_0 = \mathrm{Int}\mathfrak{g}_0 \cap \mathrm{Int}\mathfrak{g}_u$, 故为紧子群. 显然, M' 在 K_0 中闭, M 在 M' 中闭正规. 故 M, M' 均为紧子群.

(2) 设 $X \in \mathfrak{k}_0$, $[X, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$. 于是任取 $H \in \mathfrak{a}$, 有

$$([H, X], [H, X]) = -(X, [H, [H, X]]),$$

这里 $(X, Y) = -B(X, Y)$, B 为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}}$ 的 Killing 型, 它在 $\mathfrak{p}_0$ 上正定. 由 $[H, X] \in \mathfrak{a}$, 故 $[H, [H, X]] = 0$. 故 $([H, X], [H, X]) = 0$. 故 $[H, X] = 0$. 于是有 (2) 成立.

(3) M'/M 为紧 Lie 群. 其 Lie 代数是零维的. 故 M'/M 为有限群. □

显然有

$$W(\mathfrak{g}_0) = M'/M = M'|_{\mathfrak{a}}.$$

由 $e^{\mathrm{ad}X}$ $(X \in \mathfrak{g}_0)$ 保持 Killing 型不变. 故 $M'|_{\mathfrak{a}}$ 是实正交变换.

令 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{R}}$ 为 $\mathfrak{h}_0^{\mathfrak{C}}$ 的幂等, 即

$$\mathfrak{h}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+ + \mathfrak{a}.$$

记 $\mathfrak{h}_R$ 到 $\mathfrak{a}$ 上的射影为 ρ, $\forall H \in \mathfrak{h}_R$, 有

$$H = \sqrt{-1}H' + \rho(H),$$

其中 $H' \in \mathfrak{h}^+$. 设 Δ 为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}_R$ 的根系.

定义 1 $\Delta' = \{\rho(\alpha) \neq 0 | \alpha \in \Delta\}$ 称为关于 $\mathfrak{a}$ 的 **约化根系**.

P_+, P_- 及 P'_+ 如 2.3.2 所述. 显然, $\Delta' = P'_+ \cup -P'_+$.

对 $\alpha \in \Delta$, 令 $\mathfrak{h}_\alpha = \{H \in \mathfrak{h}_R | (H, \alpha) = 0\}$, 于是

$$\mathfrak{h}_\alpha \cap \mathfrak{a} = \{H \in \mathfrak{a} | (H, \rho(\alpha)) = 0\}.$$

若 $\rho(\alpha) \neq 0$, 记

$$\mathfrak{a}_{\rho(\alpha)} = \mathfrak{h}_\alpha \cap \mathfrak{a}.$$

定义 2 $\mathfrak{a} \setminus \bigcup_{\rho(\alpha) \in \Delta'} \mathfrak{a}_{\rho(\alpha)}$ 的连通分支称为 **约化 Weyl 房**.

$\mathfrak{a}$ 中关于 $\mathfrak{a}_{\rho(\alpha)}$ 的反射为

$$w_{\rho(\alpha)} H = H - \frac{2(H, \rho(\alpha))}{(\rho(\alpha), \rho(\alpha))} \rho(\alpha), \quad \forall H \in \mathfrak{a}, \ \rho(\alpha) \in \Delta'.$$

记 S 为所有 $\{w_{\rho(\alpha)} | \rho(\alpha) \in \Delta'\}$ 生成的群. 下面我们将要证明 $W(\mathfrak{g}_0) = S$, 且在约化 Weyl 房上单可递. 在证明前, 我们先证明一个引理, 然后逐步证明.

设在 $\mathfrak{h}_R$ 中引进了关于 $\mathfrak{a}$ 的可容许正方向. 于是

$$P_- = \{\alpha \in \Delta^+ | \rho(\alpha) = 0\}, \ P_+ = \{\alpha \in \Delta^+ | \rho(\alpha) > 0\}.$$

引理 2 设 $\mathfrak{h}_0$ 为包含约化 Cartan 子代数 $\mathfrak{a}$ 的正则 Cartan 子代数. 其它符号如上. 则有以下结果.

(1) $C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})^C = (\mathfrak{h}^+)^C + \sum_{\alpha \in P_-} (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha})$.

(2) 若 H 为 $\mathfrak{a}$ 的正则元, 即 $(H, \rho(\alpha)) \neq 0$, $\forall \rho(\alpha) \in \Delta'$, 则有

$$C_{\mathfrak{k}_0}(H) = C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a}).$$

(3) $\forall\alpha \in \pm P_+$, 有 $0 \neq Y_\alpha \in \mathfrak{p}_0$, $0 \neq Z_\alpha \in \mathfrak{k}_0$ 使得 $\forall H \in \mathfrak{a}$,

$$[H,\ Y_\alpha] = (\alpha,\ H)Z_\alpha,\ [H,\ Z_\alpha] = (\alpha,\ H)Y_\alpha.$$

证 (1) 令 $\mathfrak{m} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})^{\mathbf{C}}$, 若 $X \in \mathfrak{m}$, $X = H + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$, $H \in \mathfrak{h}$. 由 $[X,\ \mathfrak{a}] = 0$ 得 $\forall H' \in \mathfrak{a}$ 有

$$0 = [X,\ H'] = \sum_{\alpha\in\Delta}(\alpha,\ H')X_\alpha,$$

即 $(\alpha,\ \mathfrak{a}) = 0$. 所以 $\alpha \in \pm P_-$. 因而 (1) 成立.

(2) 令 $H \in \mathfrak{a}$, 且 $(H,\ \rho(\alpha)) \neq 0$, $\forall\rho(\alpha) \in \Delta'$, 故 $(H,\ \alpha) \neq 0$, $\forall\alpha \in \pm P_+$. 即 $(H,\ \alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$, 即 $\alpha \in \pm P_-$. 因而由 (1) 的证明可知 (2) 成立.

(3) 对 Weyl 基 $\{E_\alpha|\alpha \in \Delta\}$ 中 E_α, $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_R$, $\alpha \in \mathfrak{h}_R$, 故 $(\alpha,\ H) \in \mathbf{R}$. 因而有

$$\begin{aligned}[H,\ \sigma(E_\alpha)] &= [\sigma(H),\ \sigma(E_\alpha)] = \sigma[H,\ E_\alpha]\\ &= (H,\ \alpha)\sigma(E_\alpha).\end{aligned}$$

令

$$X_1 = \frac{1}{2}(E_\alpha + \sigma(E_\alpha)),\quad X_2 = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(E_\alpha - \sigma(E_\alpha)).$$

于是有 $X_i \in \mathfrak{g}_0$, 且

$$[H,\ X_i] = (\alpha,\ H)X_i,\quad i = 1,\ 2.$$

由于 $E_\alpha \neq 0$, 故 X_1, X_2 中至少有一个不为零. 不妨设 $X_1 \neq 0$. $X_1 = Y_\alpha + Z_\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{k}_0$, $Z_\alpha \in \mathfrak{p}_0$. 因而有

$$(\alpha,\ H)Y_\alpha + (\alpha,\ H)Z_\alpha = [H,\ Y_\alpha] + [H,\ Z_\alpha].$$

由 $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_0$. 故

$$[H, Y_\alpha] = (\alpha, H)Z_\alpha, \quad [H, Z_\alpha] = (\alpha, H)Y_\alpha.$$

由于 $\rho(\alpha) \neq 0$, 故有 $H \in \mathfrak{a}$, 使.$(\alpha, H) \neq 0$. 因而 $Y_\alpha = 0$ 的充分必要条件是 $Z_\alpha = 0$. 又 $X_1 = Y_\alpha + Z_\alpha \neq 0$. 故知 $Y_\alpha \neq 0$, $Z_\alpha \neq 0$. □

为书写方便, 记 $\rho(\alpha) = \alpha'$. 现在我们来证明下面的定理.

定理 1 设实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ 有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0, \quad \mathfrak{g}_u = \mathfrak{k}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_0.$$

$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}^+ + \mathfrak{a}$ 是正则 Cartan 子代数. W 是 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群. $W(\mathfrak{g}_0)$ 是约化 Weyl 群. S 是 $\{w_{\alpha'} | \alpha' \in \Delta'\}$ 生成的群. 则有

(1) $W|_\mathfrak{a} \supset W(\mathfrak{g}_0)$;

(2) $S = W(\mathfrak{g}_0)$, 且在约化 Weyl 房上单可递.

证 (1) 对任一 $g \in W(\mathfrak{g}_0)$, 即有 $k \in K_0$, 使 $k(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, $k|_\mathfrak{a} = g$. 由于 $k \in K_0$, 故知

$$k(\mathfrak{h}_o) = \mathfrak{k}(\mathfrak{h}^+) + \mathfrak{a}$$

为 $\mathfrak{g}_0$ 的正则 Cartan 子代数. 由此知有 $g_1 \in e^{\mathrm{ad} N_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})}$, 使得 $g_1(k(\mathfrak{h}^+)) = \mathfrak{h}^+$, $g_1|_\mathfrak{a} = I$. 于是

$$g_0 = g_1 k \in K_0, \ g_0(\mathfrak{h}^+) = \mathfrak{h}^+, \ \mathfrak{g}_o(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.$$

因而有 $g_0(\mathfrak{h}_R) = \mathfrak{h}_R$. 故 $g_0 \in W$. 而

$$g_0|_\mathfrak{a} = k|_\mathfrak{a} = g.$$

因而 $W(\mathfrak{g}_0) \subset W|_\mathfrak{a}$.

(2) 结论 (2) 的证明完全类似于 Weyl 群, Weyl 房及由根系决定的反射所产生的群之间的关系.

首先, 我们证明 $S \subset W(\mathfrak{g}_0)$. 对于 $\alpha \in \Delta$, $\alpha' \neq 0$, 有 $Y_\alpha \in \mathfrak{k}_0$, $Z_\alpha \in \mathfrak{p}_o$, 使得 $\forall H \in \mathfrak{a}$,

$$[H,\ Y_\alpha] = (H,\ \alpha')Z_\alpha,\ \ [H,\ Z_\alpha] = (H,\ \alpha')Y_\alpha.$$

由于 $Y_\alpha \in \mathfrak{k}_0$. 不妨设

$$(Y_\alpha,\ Y_\alpha) = 1.$$

又 $[Y_\alpha,\ Z_\alpha] \in \mathfrak{p}_0$, 且

$$[H,\ [Y_\alpha,\ Z_\alpha]] = [[H,\ Y_\alpha],\ Z_\alpha] + [Y_\alpha,\ [H,\ Z_\alpha]] = 0.$$

故 $[Y_\alpha,\ Z_\alpha] \in \mathfrak{a}$. 又

$$\begin{aligned}(H,\ [Y_\alpha,\ Z_\alpha]) &= -([H,\ Z_\alpha],\ Y_\alpha)\\ &= -(\alpha,\ H) = -(\rho(\alpha),\ H)\\ &= -(\alpha',\ H).\end{aligned}$$

故知

$$[Y_\alpha,\ Z_\alpha] = -\alpha'.$$

而且 $(\alpha',\ \alpha') < 0$. 令

$$g_0 = e^{\mathrm{ad}\frac{\pi}{\sqrt{-(\alpha',\ \alpha')}}Y_\alpha} \in K_0.$$

不难证明

$$(\mathrm{ad}\frac{\pi}{\sqrt{-(\alpha',\ \alpha')}}Y_\alpha)^{2k+1}H = -\frac{(H,\ \alpha')\cdot(-1)^k\pi^{2k+1}}{\sqrt{-(\alpha',\ \alpha')}}Z_\alpha,$$

$$\left(\mathrm{ad}\frac{\pi}{\sqrt{-(\alpha',\ \alpha')}}Y_{\alpha}\right)^{2k+2}H=\frac{(H,\ \alpha')\cdot(-1)^k\pi^{2k+2}}{(\alpha',\ \alpha')}\alpha',$$

$$\forall H\in\mathfrak{a},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

因而有

$$\begin{aligned}g_0(H)\ &=H-\frac{(H,\ \alpha')}{\sqrt{-(\alpha',\ \alpha')}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\pi^{2k+1}}{(2k+1)!}Z_\alpha\\&\quad+\frac{(H,\ \alpha')}{(\alpha',\ \alpha')}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\pi^{2k}}{(2k)!}\alpha'\\&=H-\frac{(H,\ \alpha')\sin\pi}{\sqrt{-(\alpha',\ \alpha')}}Z_\alpha+\frac{(H,\ \alpha')}{(\alpha',\ \alpha')}(\cos\pi-1)\alpha'\\&=H-\frac{2(H,\ \alpha')}{(\alpha',\ \alpha')}\alpha'\\&=w_{\alpha'}(H).\end{aligned}$$

即有 $g_0(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}$. $g_0|_{\mathfrak{a}}=w_{\alpha'}$. 故知 $w_{\alpha'}\in W(\mathfrak{g}_0)$, $\forall\alpha'\in\Delta'$. 即 $S\subset W(\mathfrak{g}_0)$.

其次, 我们证明 $W(\mathfrak{g}_0)$ 把约化 Weyl 房变为约化 Weyl 房. S 在约化 Weyl 房上可递.

事实上, 对任一 $g\in W(\mathfrak{g}_0)$, 有 $k\in K_0$, 使 $k|_{\mathfrak{a}}=g$. 由 (1) 的证明知, 有 $g_0\in W$, 使得

$$g_0(\mathfrak{h}^+)=\mathfrak{h}^+,\quad \mathfrak{g}_0|_{\mathfrak{a}}=\mathfrak{g}.$$

因而 $\alpha\in\Delta$, $g_0(\alpha)\in\Delta$, 而且

$$(g_0(\alpha))'=g_0(\alpha')=g(\alpha').$$

因而 $g(\Delta') = \Delta'$. 而

$$g(\mathfrak{a}_{\alpha'}) = \mathfrak{a}_{g(\alpha')} = \mathfrak{a}_{g_0(\alpha)'},$$

故 g 将约化 Weyl 房变到约化 Weyl 房.

与 Weyl 群及 Weyl 房的讨论完全一样, 可以证明 S 在约化 Weyl 房的集合上可递. 因而 $W(\mathfrak{g}_0)$ 在约化 Weyl 房上可递.

最后我们证明 $W(\mathfrak{g}_0)$ 在约化 Weyl 房上单可递, 因而有 $W(\mathfrak{g}_0) = S$.

设 C_0 是一个约化 Weyl 房, 要证明 $W(\mathfrak{g}_0)$ 单可递, 只要证明 $g \in W(\mathfrak{g}_0)$, $g(C_0) = C_0$, 则有 $g = I$. 由于 $W(\mathfrak{g}_0)$ 是有限群. 故 g 为有限阶, 设阶为 N. $\forall H_0 \in C_0$, 记

$$H = \frac{1}{N}(H_0 + g(H_0) + \cdots + g^{N-1}(H_0)).$$

于是 $g(H) = H$. $\frac{1}{N}H_0$, $\frac{1}{N}g(H_0)$, $\cdots$, $\frac{1}{N}g^{N-1}(H_0) \in C_0$. 又 C_0 是连通开凸集. 可以证明 $H \in C_0$. $H \in C_0$, 故 $(\alpha', H) \neq 0$, $\forall \alpha' \in \Delta'$. 故 $C_{\mathfrak{t}_0}(H) = C_{\mathfrak{t}_0}(\mathfrak{a})$.

考虑 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}_u$ 中由 $e^{\mathrm{ad}C_{\mathfrak{g}_u}(H)}$ 生成的子群. 由于 $H \in \mathfrak{a}$, 故 $\sqrt{-1}H \in \mathfrak{g}_u$.

$$e^{\mathrm{ad}\sqrt{-1}Ht}$$

是 $\mathfrak{g}_u$ 的内自同构群中单参数子群. 于是其闭包为 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}_u$ 中闭连通可换子群. 即为环面. 此环面在 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}_u$ 中的中心化子连通. 设 $e^{t\mathrm{ad}Z}$ 在此中心化子中, 即有

$$e^{t\mathrm{ad}Z}e^{\mathrm{ad}\sqrt{-1}t_1H}e^{-t\mathrm{ad}Z} = e^{\mathrm{ad}\sqrt{-1}t_1H}.$$

即当且仅当 $e^{t\mathrm{ad}Z}H = H$, $Z \in C_{\mathfrak{g}_u}(H)$. 因而此中心化子就是 $e^{\mathrm{ad}C_{\mathfrak{g}_u}(H)}$.

令 $g(C_0) = C_0$, $g \in W(\mathfrak{g}_0)$. 故有 $k \in K_0$, 使得 $k(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, $k|_{\mathfrak{a}} = g$. 于是 $k(H) = H$. 即有 $k \in e^{\mathrm{ad}C_{\mathfrak{g}_u}(H)} \cap K_0 = e^{\mathrm{ad}C_{\mathfrak{k}_0}(H)} = e^{\mathrm{ad}C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})}$. 因而 $k|_{\mathfrak{a}} = I$. 故 $g = I$. □

4.19 约化素根系 特征

与根系中有素根系一样, 在约化根系中有约化素根系, 并且有相应的许多性质. 我们仍然假定 $\mathfrak{h}_o$ 是包含约化 Cartan 子代数 $\mathfrak{a}$ 的正则 Cartan 子代数. Δ 为根系. ρ 为幂等 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{R}}$ 在 $\mathfrak{a}$ 上的射影.

定义 1 设 Π 是 Δ 关于 $\mathfrak{a}$ 的可容许正方向的素根系, 则称 Π 为 **容许素根系**.

以下均假定 Π 是容许素根系, 记

$$\Pi' = \rho(\Pi) \setminus \{0\}.$$

记 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t, \alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_l\}$, 其中

$$\rho(\alpha_i) = \alpha_i' \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, t;$$
$$\rho(\alpha_i) = 0, \quad i = t+1, \ldots, l.$$

令 $\Pi_0 = \{\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_l\}$. 则

$$\Pi' = \rho(\Pi \setminus \Pi_0).$$

引理 1 对于 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{R}} = \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+ + \mathfrak{a}$ 的可容许正方向, $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_t, \alpha_{t+1}, \cdots, \alpha_l\}$ 为对应的素根系. 且

$$\Pi_0 = \{\alpha_i | t+1 \leq i \leq l\},$$

$$\Pi \setminus \Pi_0 = \{\alpha_i | 1 \leq i \leq t\}.$$

则有

$$\sigma(\alpha_i) = \alpha_{i'} + \sum_{j=t+1}^{l} c_{ij}\alpha_j,$$

其中 $1 \leq i' \leq t$, $c_{ij} \geq 0$, $c_{ij} \in \mathbf{Z}$. 对于 $i \to i'$ 确定的 $\{1, 2, \cdots, t\}$ 到自身的映射，有

$$(i')' = i.$$

证 如 2.3 的符号

$$P_+ = \{\alpha \in \Delta^+ | \rho(\alpha) > 0\}.$$

于是由 2.3 引理 5 之 (2), 对 $\alpha_i \in \Pi \setminus \Pi_0 \subseteq P_+$, 有 $\sigma(\alpha_i) \in P_+$. 因而有

$$\sigma(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{l} m_{ij}\alpha_j, \quad m_{ij} \geq 0, \ m_{ij} \in \mathbf{Z}.$$

因而有

$$\alpha_i = \sigma^2(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{l} m_{ij}\sigma(\alpha_j).$$

$j \geq t+1$ 时， $\alpha_j \in \Pi_0 \subset P_-$, 有 $\sigma(\alpha_j) = -\alpha_j$, 于是

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{t} m_{ij}m_{jk}\alpha_k + \sum_{j=t+1}^{l} m_{ij}(-\alpha_k).$$

因而有

$$\sum_{j=1}^{t} m_{ij}m_{jk} = \delta_{jk}, \quad 1 \leq i, \ k \leq t.$$

$$\sum_{k=1}^{t} m_{ik}m_{kj} = m_{ij}, \quad 1 \le i \le t,\ t+1 \le j \le l.$$

由于

$$\sum_{k=1}^{t} m_{ik}m_{ki} = 1,$$

故必有 i' 使 $1 \le i' \le t$, $m_{ii'} = m_{i'i} = 1$, $m_{ik} = m_{ki} = 0$, $k \ne i'$. 即

$$m_{ik} = m_{ki} = \delta_{ki'}.$$

因而

$$\sigma(\alpha_i) = \alpha_{i'} + \sum_{j=t+1}^{l} m_{ij}\alpha_j,$$

且

$$\alpha_i = \sigma(\alpha_{i'}) - \sum_{j=t+1}^{l} m_{ij}\alpha_j.$$

即有

$$\sigma(\alpha_{i'}) = \alpha_i + \sum_{j=t+1}^{l} m_{ij}\alpha_j,$$

$$(i')' = i.$$ □

系 $\rho(\alpha_i) = \rho(\alpha_{i'})$.

事实上，从引理的证明可知

$$\sigma(\alpha_i) - \sigma(\alpha_{i'}) = \alpha_{i'} - \alpha_i,$$

即有

$$\sigma(\alpha_i - \alpha_{i'}) = -(\alpha_i - \alpha_{i'}).$$

注意到

$$\sigma|_{\mathfrak{a}} = I, \quad \sigma|_{\sqrt{-1}\mathfrak{h}^+} = -I.$$

因而有 $\alpha_i - \alpha_{i'} \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$. 因而 $\rho(\alpha_i - \alpha_{i'}) = 0$. 即 $\rho(\alpha_i) = \rho(\alpha_{i'})$. □

定理 1 Π' 构成 $\mathfrak{a}$ 的一组基. 而且当 $j \neq i, i'$ 时,

$$\frac{2(\alpha_i', \alpha_j')}{(\alpha_j', \alpha_j')} \leq 0, \quad \frac{2(\alpha_i', \alpha_j')}{(\alpha_j', \alpha_j')} \in \mathbf{Z};$$

以及

$$\alpha_j' \neq \alpha_i'.$$

证 已知 Π 为 $\mathfrak{h}_R$ 的一组基. 于是 $\forall H \in \mathfrak{a}$, 有

$$H = \sum_{i=1}^{l} a_i\alpha_i, \quad a_i \in \mathbf{R}.$$

又 $\rho(H) = H$, 故

$$H = \rho(H) = \sum_{i=1}^{t} a_i\alpha_i'.$$

因而 Π' 实线性生成 $\mathfrak{a}$.

下面证明 $j \neq i, i'$ 时,

$$0 \geq \frac{2(\alpha_i', \alpha_j')}{(\alpha_j', \alpha_j')} \in \mathbf{Z}.$$

因此 $\alpha_j' \neq \alpha_i'(= \alpha_{i'}')$. 由于 $w_{\alpha_j'} \in W(\mathfrak{g}_0)$, 而

$$w_{\alpha_j'}(\alpha_i') = \alpha_i' - \frac{2(\alpha_i', \alpha_j')}{(\alpha_j', \alpha_j')}\alpha_j'.$$

又有 $S_j \in W$, 使得 $S_j|_{\mathfrak{a}} = w_{\alpha'_j}$, 且 $\forall H \in \mathbf{R}$,

$$\rho(S_j(H)) = S_j\rho(H).$$

(因为 $S_j(\sqrt{-1}\mathfrak{h}^+) = \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$, $S_j(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ 之故). 于是

$$\rho S_j(\alpha_i) = S_j(\rho(\alpha_i)) = S_j(\alpha'_i), \quad S_j(\alpha_i) \in \Delta.$$

于是

$$S_j(\alpha_i) = \alpha_i + \sum_{k=1}^{l} m_k\alpha_k,$$

$m_k \in \mathbf{Z}$. 故有

$$w_{\alpha'_j}(\alpha'_i) = \rho(S_j(\alpha_i)) = \alpha'_i + \sum_{k=1}^{t} m_k\alpha'_k.$$

由此可知

$$\frac{2(\alpha'_i, \alpha'_j)}{(\alpha'_j, \alpha'_j)} \in \mathbf{Z}.$$

由于 $(\alpha'_j, \alpha'_j) < 0$, $(\alpha_i, \alpha_j) \geq 0$, $i \neq j$, 令

$$\begin{aligned}
2(\alpha'_j, \alpha'_j) &= (\alpha_i + \sigma(\alpha), \alpha_j) \\
&= (\alpha_i + \alpha'_i + \sum_{k=t+1}^{l} m_{ik}\alpha_k, \alpha_j) \\
&= (\alpha_i, \alpha_j) + (\alpha_{i'}, \alpha_j) + \sum_{k=t+1}^{l} m_{ik}(\alpha_k, \alpha_j),
\end{aligned}$$

$$j \neq i, i'; \ j \leq t.$$

故由 $m_{ik} \geq 0$ 知

$$(\alpha'_i, \alpha'_j) \geq 0.$$

故

$$\frac{2(\alpha_i',\ \alpha_j')}{(\alpha_j',\ \alpha_j')} \leq 0.$$

设 $\Pi' = \{\alpha_1',\ \alpha_2'\ \ldots,\ \alpha_{t_0}'\}$ 是 $\{\alpha_i' | \alpha_i \in \Pi\}$ 中不同的非零元素的集合. 下面证 Π' 线性无关. 若不然, 则有 $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{t_0}$ 不全为零, 使得

$$\sum_{i=1}^{t_0} a_i \alpha_i' = 0.$$

今对 1 及 $1'$, 存在唯一的 $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{R}}$, 使

$$(\alpha_i,\ H) = \delta_{i1} + \delta_{i1'} - \delta_{i1'}\delta_{i1'}.$$

于是有

$$(\alpha_{i'},\ H) = (\alpha_i,\ H).$$

因而有

$$\begin{aligned}(\alpha_i,\ H - \sigma(H)) &= (\alpha_i,\ H) - (\sigma(\alpha_i),\ H) \\ &= (\alpha_i,\ H) - (\alpha_{i'} + \sum_{t+1}^{l} m_{ik}\alpha_k,\ H) \\ &= (\alpha_i,\ H) - (\alpha_{i'},\ H) = 0\end{aligned}$$

因而 $\sigma(H) = H$. 故 $H \in \mathfrak{a}$. 因而

$$(\alpha_i,\ H) = (\rho(\alpha_i),\ H).$$

于是有

$$(\alpha_i',\ H) = \delta_{i1},\ \ 1 \leq i \leq t_0.$$

于是

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{t_0} a_i \alpha_i',\ H\right) = a_1.$$

同理可证 $a_2 = \cdots = a_{t_0} = 0$. 即 $\{\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_{t_0}'\} = \Pi'$ 为 $\mathfrak{a}$ 的一组基. □

系 $\Pi_0 = \{\alpha_i \in \Pi | \rho(\alpha_i) = 0\}$ 是紧 Lie 代数 $C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})$ 的素根系.

证 由 4.1 的引理 2 之 (1), 我们有

$$C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})^C = (\mathfrak{h}^+)^{\mathfrak{C}} + \sum_{\alpha \in \mathfrak{P}_-} (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}).$$

因而 $\pm P_-$ 为根系. 而 $\alpha \in P_-$, 有 $\rho(\alpha) = 0$. 设

$$\alpha = \sum_{i=1}^{t} a_i \alpha_i + \sum_{j=t+1}^{l+1} a_j \alpha_j,$$

其中 $a_i, a_j \in \mathbf{Z}$, $a_i, a_j \geq 0$. 因而有

$$0 = \rho(\alpha) = \sum_{i=1}^{t_0} (a_i + a_{i'}) \alpha_i'.$$

因 Π' 线性无关, 故 $a_i + a_{i'} = 0$, $a_i = 0$, $1 \leq i \leq t$. 于是

$$\alpha = \sum_{j=t+1}^{l} a_j \alpha_j.$$

即 Π_0 为素根系. □

定义 2 在 $\mathfrak{a}$ 内取定一个次序, 则 $\mathfrak{g}_o$ 的所有的约化根分为正根及负根两种. 称不可分解的约化正根的集合为 **约化素根系**.

定理 2 沿用前面的符号. 有以下结论.

(1) 令 $\Delta'^+ = \rho(\Delta^+) \setminus \{0\}$, 则 Δ'^+ 中任何元素可由 Π' 中元素的非负整数线性表出.

(2) 对于 $\Pi' = \{\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_{t_0}'\}$, 则

$$C_{\Pi'} = \{H \in \mathfrak{h}_V | (H, \alpha_i') > 0\}$$

为约化 Weyl 房.

(3) 若 Π_1' 是 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{R}}$ 中另一对 $\mathfrak{a}$ 可容许正方向所确定的约化素根系, 则存在 $g \in W(\mathfrak{g}_0)$ 满足

$$g(\Pi') = \Pi_1'.$$

证 (1) $\alpha_i' \in \Delta'^+$, 即 $\alpha \in \Delta^+$, $\alpha' = \rho(\alpha)$. 于是有

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l} a_i \alpha_i, \quad a_i \geq 0, \ a_i \in \mathbf{Z}.$$

故有

$$\alpha' = \sum_{i=1}^{t} a_i \alpha_i' = \sum_{i=1}^{t_0} (a_i + a_{i'}) \alpha_i'.$$

(2) 显然

$$C_{\Pi'} = \{H \in \mathfrak{h}_V | (H, \alpha_i') > 0\} \subseteq \mathfrak{h}_V \setminus \cup \mathfrak{h}_{V\alpha'},$$

而且 $C_{\Pi'}$ 是连通开集. 若 $C_{\Pi'} \subset C_0$, C_0 为某个约化 Weyl 房. 于是有 $H_0 \in C_0 \setminus C_{\Pi'}$. 即有某个 α_i' 有 $(H_0, \alpha_i') < 0$. 任取 $H \in C_{\Pi'}$. 由 C_0 连通开凸集, 故有 $tH + (1-t)H_0 \in C_0$, $\forall t \in [0, 1]$. 而

$$f(t) = (tH + (1-t)H_0, \alpha_i') \in C([0, 1]),$$

$f(1) > 0$, $f(0) < 0$. 故有 $t_0 \in [0, 1]$ 使

$$f(t_0) = (t_0 H + (1-t_0)H_0, \alpha_i') = 0,$$

即 $(t_0H+(1-t_0)H_0,\ \alpha_i') \notin C_0$. 矛盾. 故 $C_{\Pi'}$ 为约化 Weyl 房.

(3) 由 $C_{\Pi'}$, $C_{\Pi_1'}$ 均为约化 Weyl 房. 于是有 $g \in W(\mathfrak{g}_0)$, 使得 $g(C_{\Pi'}) = C_{\Pi_1'}$. 因而

$$\begin{aligned} C_{\Pi_1'} &= \{gH \in \mathfrak{h}_V \mid (gH,\ g\alpha_i') > 0\} \\ &= \{gH \in \mathfrak{h}_V \mid (gH,\ \beta_i') > 0\}, \end{aligned}$$

其中 $\Pi_1' = \{\beta_1',\ \beta_2',\ \ldots,\ \beta_{t_0}'\}$. 因而不妨设

$$g(\alpha_i') = a_i\beta_i',\ \ a_i > 0.$$

注意到 $g(\Delta^+)' = (\Delta_1^+)'$, 因而 $a_i = 1$. 故 $g(\Pi') = \Pi_1'$. □

从前面的讨论知: 对于取定的次序, Π' 为约化素根系; 任何约化素根系都是容许素根系的射影, 反之亦然.

定义 3 容许素根系对约化素根系的射影称为实单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 **特征**.

从前面的讨论知容许素根系 Π 可分为两部分:

$$\Pi_0 = \{\alpha \in \Pi \mid \rho(\alpha) = \alpha' = 0\}, \quad \Pi \setminus \Pi_0.$$

而约化素根系为

$$\Pi' = (\Pi \setminus \Pi_0)'.$$

下面我们证明实单李代数的特征对任何正则 Cartan 子代数及其中的任何容许方向都是相同的.

引理 2 在 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{R}} = \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+ + \mathfrak{a}$ 中有两个可容许正方向, 它们决定的素根系分别为 Π_1, Π_2. 如果

$$\Pi_1' = \Pi_2',$$

则存在 $k_1 \in \mathrm{Int}C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})$, 其自然扩充满足

$$k_1(\Pi_{10}) = \Pi_{20},\ k_1(\Pi_1 \setminus \Pi_{10}) = \Pi_2 \setminus \Pi_{20},\ k_1(\Pi_1) = \Pi_2.$$

证 由于 Π_{10}, Π_{20} 均为 $C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})$ 的素根系，于是有 $k_1 \in \mathrm{Int}C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})$, 使得

$$k_1(\Pi_{10}) = \Pi_{20}.$$

显然， $k_1|_{\mathfrak{a}} = I$. 因而有 $k_1(\mathfrak{h}_{\mathfrak{R}}) = \mathfrak{h}_{\mathfrak{R}}$. 故有 $k_1(\Delta) = \Delta$. 显然 $\alpha \in \Pi_{10}$, $k_1(\alpha) \in \Pi_{20}$. $\alpha \in \Pi$, 但 $\alpha \notin \Pi_{10}$, 则 $\rho(\alpha) > 0$, $\rho(k_1(\alpha)) = \rho(\alpha) > 0$. 于是 $k_1(\alpha) > 0$. 因而 $k_1(\alpha) \in \Delta^+$. 故 $k_1(\Pi_1) = \Pi_2$. □

事实上，这个引理可以推广为，若 $\mathfrak{h}_i$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的两个正则 Cartan 子代数, 包含同一个约化 Cartan 子代数 $\mathfrak{a}$. 又 Π_1, Π_2 为可容许正方向所确定的素根系. $\Pi_1' = \Pi_2'$. 则有 $k_1 \in \mathrm{Int}C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a})$, 扩充后 $k_1(\Pi_1) = \Pi_2$, $k_1(\Pi_{10}) = \Pi_{20}$, $k_1(\Pi_1 \setminus \Pi_{10}) = \Pi_2 \setminus \Pi_{20}$.

定理 3 (Satake) 设 Π_1, Π_2 是由两个正则 Cartan 子代数所确定的容许素根系，则有 $k \in \mathrm{Int}\mathfrak{g}_0$, 使得 $k(\Pi_1) = \Pi_2$.

证 设对应的正则 Cartan 子代数为

$$\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_i^+ + \mathfrak{a}_i, \quad i = 1,\ 2.$$

对应 Cartan 分解为

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i, \quad i = 1,\ 2.$$

由于 $\mathfrak{a}_i$ 为 $\mathfrak{p}_i$ 中极大可换的，于是有 $k_1 \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_0$, 使得

$$k_1\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2,$$

$$k_1(\mathfrak{h}_1^+) = \mathfrak{h}_2^+, \quad \mathfrak{k}_1(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_2.$$

因而 $k_1(\Pi_1)$, Π_2 均为 $\mathfrak{h}_2$ 的可容许素根系. 由定理 2 之 (3) 及 4.1 的引理 1 知, 有 $k_2 \in M'$, 使得

$$k_2 k_1 (\Pi_1)' = \Pi_2'.$$

由引理 2 知, 有 $k_3 \in M'$, 使得

$$k_3 k_2 k_1 (\Pi_1) = \Pi_2.$$

故 $k = k_3 k_2 k_1 \in \mathrm{Int}\mathfrak{g}_0$, 使得

$$k(\Pi_1) = \Pi_2. \qquad \square$$

定义 4 在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}}$ 的 Dynkin 图中, 以实心黑点表示 Π_0 中素根, 以空心白圈表示 $\Pi \setminus \Pi_0$ 中的素根. 若 α, $\beta \in \Pi \setminus \Pi_0$, 且 $\alpha' = \beta'$ 则用箭头将表示 α, β 的点连接起来. 如此构成的图称为 **Satake 图**.

从定理 1 可知如果 $\alpha_i \in \Pi \setminus \Pi_0$, 则在 Satake 图解中 α_i 只与 $\alpha_{i'}$ 用箭头连接. 这样作 Satake 图也只要标出容许素根系的图中 α_i $(\alpha_i' = 0)$ 的点以及 α_i, $\alpha_{i'}$ $(\alpha_i' \neq 0)$ 的点对就可以了.

定理 4 实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 Satake 图是唯一确定的.

证 设 $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_i^+ + \mathfrak{a}_i$ 的可容许素根系为 Π_i. ρ_i 为 $(\mathfrak{h}_i)_{\mathfrak{R}} = \sqrt{-1}\mathfrak{h}_i^+ + \mathfrak{a}_i$ 在 $\mathfrak{a}_i$ 上的投影. 于是对应 $\mathfrak{h}_i$, $\mathfrak{k}_i$ 的 Satake 图由 ρ_i 完全决定. 由定理 3, $\exists k \in \mathrm{Int}\mathfrak{g}_0$, 使得 $k(\Pi_1) = \Pi_2$. 因而 $k(\mathfrak{h}_1)_{\mathfrak{R}} = (\mathfrak{h}_2)_{\mathfrak{R}}$. 由 $k \in \mathrm{Int}\mathfrak{g}_0$, 故有

$$k(\sqrt{-1}\mathfrak{h}_1^+) = \sqrt{-1}\mathfrak{h}_2^+, \quad \mathfrak{k}(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_2.$$

因而有

$$\rho_2 = k \rho_1 k^{-1}.$$

由此可知, Π_i 确定的 Satake 图相同. $\square$

4.20 约化 Cartan 子代数的标准形

这节我们将从 T- 正常 Cartan 子代数的标准形求出正则 Cartan 子代数的容许素根系，而得到约化素根系. 故此可做出实单李代数的 Satake 图.

设实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ 有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0.$$

$\mathfrak{h}_0$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的正则 Cartan 子代数，且有标准分解

$$\mathfrak{h}_\circ = \mathfrak{h}^+ + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_\circ \cap \mathfrak{k}_\circ + \mathfrak{h}_\circ \cap \mathfrak{p}_\circ.$$

在 $\mathfrak{h}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+ + \mathfrak{a}$ 中引进可容许正方向后，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\circ^{\mathfrak{C}}$ 对 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\circ^{\mathfrak{C}}$ 的根系 Δ 分成了正负根系 $\Delta^{\pm}$. 因而有素根系 Π.

$$P_- = \{\alpha \in \Delta^+ | \alpha' = 0\} = \{\alpha \in \Delta^+ | \theta(\alpha) = \alpha\},$$

$$P_+ = \Delta^+ \setminus P_- = \{\alpha \in \Delta^+ | \alpha' > 0\} = \{\alpha \in \Delta^+ | \theta(\alpha) \neq \alpha\}.$$

再令

$$\Pi_0 = \Pi \cap P_-, \quad \Pi \setminus \Pi_0 = \Pi \cap P_+.$$

由 $\Pi_0 = \Pi \cap P_-$，$\Pi \setminus \Pi_0 = \Pi \cap P_+$ 就可以作出 Satake 图来. 下面我们从 $\mathfrak{g}_0$ 的最大紧 Cartan 子代数出发定出 $\mathfrak{p}_0$ 中最大可换子代数，正则 Cartan 子代数及 $\Pi_0 = \Pi \cap P_-, \Pi \setminus \Pi_0 = \Pi \cap P_+$.

设 $\mathfrak{g}_0$ 为实半单 Lie 代数，有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0.$$

$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k}_\circ + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_\circ$ 为紧半单李代数. 又设 $\mathfrak{g}_\circ$，$\mathfrak{u}$ 对应的共轭为 σ，τ. Cartan 对合为 θ. 在 $\mathfrak{u}$ 中可选取 Cartan 子代数

$\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}_{\mathfrak{T}} + \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}$, 使得 $\mathfrak{h}_o = \mathfrak{h}_{\mathfrak{T}} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}$ 为 $\mathfrak{g}_o$ 的 T- 正常 Cartan 子代数. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{u}^{\mathfrak{C}}$ 对 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_u^{\mathfrak{C}}$ 的根系为 Δ. 对 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{T}}$ 的可容许正方向有 Δ^+ 与 Δ^- 及 Π. $\{e_\alpha|\alpha \in \Delta\}$ 为 $\mathfrak{u}$ 对应的 Weyl 基. θ 有 Gantmacher 标准形

$$\theta = \theta_0 e^{\mathrm{ad}H_0}, \quad H_0 \in \mathfrak{h}_T.$$

此时根系 Δ 有分解

$$\begin{aligned}
&\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_n \cup \Delta_c;\\
&\Delta_0 = \{\alpha \in \Delta|\theta(\alpha) \neq \alpha\};\\
&\Delta_n = \{\alpha \in \Delta|\theta(\alpha) = \alpha,\ \theta(e_\alpha) = -e_\alpha\};\\
&\Delta_c = \{\alpha \in \Delta|\theta(\alpha) = \alpha,\ \theta(e_\alpha) = e_\alpha\};\\
&\Delta_0' = \{\alpha'|\alpha \in \Delta_0,\ \alpha' = \frac{1}{2}(\alpha + \theta(\alpha)\}.
\end{aligned}$$

于是 $\mathfrak{k}_0^C$ 对 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{T}}^{\mathfrak{C}}$ 有根系

$$\Delta_\theta = \Delta_c \cup \Delta_0'.$$

$(\mathrm{ad}, \sqrt{-1}\mathfrak{p}_0)$ 作为 $\mathfrak{k}_0$ 的表示有权系

$$\Phi_\theta = \Delta_n \cup \Delta_0'.$$

而且

$$\begin{aligned}
&\alpha \in \Delta_c, \quad 则\ e_\alpha \in \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0^C,\\
&\alpha \in \Delta_n, \quad 则\ e_\alpha \in \mathfrak{p} = (\sqrt{-1}\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{p}_o^{\mathfrak{C}},\\
&\alpha \in \Delta_0, \quad 则\ e_\alpha + \theta(e_\alpha) \in \mathfrak{k},\ e_\alpha - \theta(e_\alpha) \in \mathfrak{p}.
\end{aligned}$$

注意到 $\{e_\alpha|\alpha \in \Delta\}$ 是关于 $\mathfrak{g}_u$ 的 Weyl 基. 因而有

$$\tau(e_\alpha) = e_{-\alpha}.$$

于是

$$\theta(e_\alpha) = \sigma\tau(e_\alpha) = \sigma(e_{-\alpha}).$$

特别,

$$\tau(e_\alpha) = e_{-\alpha}, \quad 当\ \alpha \in \Delta_c;$$
$$\tau(e_\alpha) = -e_{-\alpha}, \quad 当\ \alpha \in \Delta_n.$$

由此可知 $\mathfrak{k}_0$ 的基可由 $\mathfrak{h}_T$ 的基加上下面元素构成

$$\{e_\alpha + e_{-\alpha},\ \sqrt{-1}(e_\alpha - e_{-\alpha}) | \alpha \in \Delta_c^+\},$$
$$\{e_\alpha + e_{-\alpha} + \sigma(e_\alpha + e_{-\alpha}),$$
$$\sqrt{-1}(e_\alpha - e_{-\alpha} - \sigma(e_\alpha - e_{-\alpha})) | \alpha \in \Delta_0^+\}.$$

而 $\mathfrak{p}_0$ 的基则由 $\mathfrak{h}_V$ 的基加上下面元素构成

$$\{e_\alpha - e_{-\alpha},\ \sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}) | \alpha \in \Delta_n^+\},$$
$$\{e_\alpha - e_{-\alpha} + \sigma(e_\alpha - e_{-\alpha}),$$
$$\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha} - \sigma(e_\alpha + e_{-\alpha})) | \alpha \in \Delta_0^+\}.$$

引理 1 符号如上, 则 $\mathfrak{h}_V^{\mathbf{C}} + \sum\limits_{\alpha \in \Delta_n} \mathfrak{g}_\alpha = C_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{h}_V^{\mathbf{C}})$.

证 如 $\alpha \in \Delta_n$, 则 $\theta(\alpha) = \alpha$, 且 $\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathfrak{T}}$. 于是 $(\alpha,\ \mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{C}}) = 0$. 故 $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{C}})$. 因此

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{C}} + \sum_{\alpha \in \mathfrak{d}_n} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{C}}).$$

对于 $\alpha \in \Delta_0$, $(\alpha,\ \mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{C}}) \neq 0$. 于是有 $H_V \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{C}}$, 使得

$$(H_V,\ \alpha) \neq 0,\ \forall \alpha \in \Delta_0.$$

而由 $\{e_\alpha+\theta(e_\alpha)|\alpha\in\Delta_0\}$ 线性无关, $(\alpha,\ H_V)\neq 0$, 知 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta_0} c_\alpha(e_\alpha - \theta(e_\alpha))\neq 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
&[H_V,\ \sum c_\alpha(e_\alpha-\theta(e_\alpha))]\\
=&\sum c_\alpha((\alpha,\ H_V)e_\alpha-[H_V,\ \theta(e_\alpha)])\\
=&\sum c_\alpha((\alpha,\ H_V)e_\alpha-[H_V,\ \sigma(e_{-\alpha})])\\
=&\sum c_\alpha((\alpha,\ H_V)e_\alpha-\sigma[\sigma H_V,\ e_{-\alpha}])\\
=&\sum c_\alpha((\alpha,\ H_V)e_\alpha-\overline{(\sigma H_V,\ -\alpha)}\sigma(e_{-\alpha}))\\
=&\sum c_\alpha(\alpha,\ H_V)(e_\alpha+\theta(e_\alpha))\\
\neq& 0.
\end{aligned}
$$

故引理成立. □

注意到, 对 $\alpha\in\Delta_n$, $\sigma(e_\alpha)=-e_{-\alpha}$. 因而有 $\sigma(\sum\limits_{\alpha\in\Delta_n}\mathfrak{g}_\alpha)=\sum\limits_{\alpha\in\Delta_n}\mathfrak{g}_\alpha$. 因而

$$\left(\mathfrak{g}_0\bigcap\sum_{\alpha\in\mathfrak{d}_n}\mathfrak{g}_\alpha\right)^C=\sum_{\alpha\in\Delta_n}\mathfrak{g}_\alpha.$$

于是 $\mathfrak{g}_0\cap\sum\limits_{\alpha\in\Delta_n}\mathfrak{g}_\alpha$ 有基

$$\{e_\alpha-e_{-\alpha},\ \sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha}),\ |\alpha\in\Delta_n^+\}.$$

由此可知包含 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}$ 的约化 Cartan 子代数为

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{h}_V+\mathfrak{a}_1,\ \text{其中}\ \mathfrak{a}_1\subseteq\mathfrak{g}_0\bigcap\sum_{\alpha\in\mathfrak{d}_n}\mathfrak{g}_\alpha.$$

下面来具体构造 $\mathfrak{a}_1$.

设 γ_1 为 Δ_n^+ 中最高根，令

$$\Delta_n^+(\gamma_1) = \{\alpha \in \Delta_n^+ | \alpha \neq \gamma_1,\ \alpha \pm \gamma_1 \notin \Delta\}.$$

设 γ_2 为 $\Delta_n^+(\gamma_1)$ 中最高根. 令

$$\begin{aligned}\Delta_n^+(\gamma_1,\ \gamma_2) &= (\Delta_n^+(\gamma_1))(\gamma_2) \\ &= \{\alpha \in \Delta_n^+(\gamma_1) | \alpha \neq \gamma_2,\ \alpha \pm \gamma_2 \notin \Delta\}.\end{aligned}$$

设 γ_3 为 $\Delta_n^+(\gamma_1,\ \gamma_2)$ 的最高根. 又可作出 $\Delta_n^+(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3), \ldots,$ 依次下去. 由 Δ_n^+ 有限. 故有 t, 使得

$$\Delta_n^+(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_t) = \emptyset.$$

定理 1 令 $\mathfrak{a}_1$ 为 $e_{\gamma_1} - e_{-\gamma_1},\ \ldots,\ e_{\gamma_t} - e_{-\gamma_t}$ 生成的实线性空间，则

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{h}_V$$

是约化 Cartan 子代数.

证 显然由引理 1 可知 $[\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{h}_V] = 0$. 又因 $\gamma_i \pm \gamma_j \notin \Delta$, 故 $[e_{\pm\gamma_i},\ e_{\pm\gamma_j}] = 0$. 因而

$$[e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i},\ e_{\gamma_j} - e_{-\gamma_j},] = 0.$$

因而 $[\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_1] = 0$. 故 $[\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}] = 0$.

为证 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{p}_o$ 中极大可换，只要证 $\mathfrak{a}_1$ 在 $\mathfrak{p}_o$ 的子空间 $\mathfrak{g}_o \cap \sum\limits_{\alpha \in \partial_n} \mathfrak{g}_\alpha$ 中极大可换. 若 $\alpha \neq \gamma_i$, $1 \leq i \leq t$, $\alpha \in \Delta_n^+$, 注意到

$$\Delta_n^+ \supset \Delta^+(\gamma_1) \supset \cdots \supset \Delta_n^+(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_{t-1}) \supset \emptyset.$$

因此，一定有 i_0, 使得

$$\alpha \in \Delta_n^+(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i_0-1}) \setminus \Delta_n^+(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i_0}).$$

即有 $\alpha + \gamma_{i_0}$ 或 $\alpha - \gamma_{i_0} \in \Delta$. 因而

$$[e_\alpha, e_{\gamma_{i_0}}] = N_{\alpha, \gamma_{i_0}} e_{\alpha+\gamma_{i_0}} \neq 0$$

或

$$[e_\alpha, e_{-\gamma_{i_0}}] = N_{\alpha, -\gamma_{i_0}} e_{\alpha-\gamma_{i_0}} \neq 0$$

至少有一个成立. 考虑 $\mathfrak{g}_0 \cap \sum\limits_{\alpha\in\Delta_n} \mathfrak{g}_\alpha$ 中元素

$$X = \sum_{\alpha\neq\gamma_{i_0}} a_\alpha(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta_n^+} b_\alpha\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}).$$

如果 $[X, \mathfrak{a}_1] = 0$, 则有

$$[e_{\gamma_{i_0}} - e_{-\gamma_{i_0}}, X] = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned}
&[e_{\gamma_{i_0}} - e_{-\gamma_{i_0}}, e_\alpha - e_{-\alpha}] \\
=& N_{\gamma_{i_0}, \alpha} e_{\gamma_{i_0}+\alpha} + N_{-\gamma_{i_0}, -\alpha} e_{-(\gamma_{i_0}+\alpha)} \\
&- N_{-\gamma_{i_0}, \alpha} e_{-\gamma_{i_0}+\alpha} - N_{\gamma_{i_0}, -\alpha} e_{\gamma_{i_0}-\alpha} \\
=& N_{\gamma_{i_0}, \alpha}(e_{\gamma_{i_0}+\alpha} + e_{-(\gamma_{i_0}+\alpha)}) \\
&- N_{-\gamma_{i_0}, \alpha}(e_{-\gamma_{i_0}+\alpha} + e_{-(-\gamma_{i_0}+\alpha)}),
\end{aligned}$$

$N_{\gamma_{i_0}, \alpha}$ 与 $N_{-\gamma_{i_0}, \alpha}$ 中至少有一个不为零;

$$[e_{\gamma_{i_0}} - e_{-\gamma_{i_0}}, e_{\gamma_{i_0}} + e_{-\gamma_{i_0}}] = 2\gamma_{i_0};$$

以及 $\alpha \neq \gamma_{i_0}$ 时

$$
\begin{aligned}
&[e_{\gamma_{i_0}} \dot{-} e_{-\gamma_{i_0}},\ e_\alpha + e_{-\alpha}] \\
&= N_{\gamma_{i_0},\,\alpha} e_{\gamma_{i_0}+\alpha} - N_{-\gamma_{i_0},\,-\alpha} e_{-(\gamma_{i_0}+\alpha)} \\
&\quad + N_{\gamma_{i_0},\,-\alpha} e_{\gamma_{i_0}-\alpha} - N_{-\gamma_{i_0},\,\alpha} e_{-\gamma_{i_0}+\alpha} \\
&= N_{\gamma_{i_0},\,\alpha}(e_{\gamma_{i_0}+\alpha} - e_{-(\gamma_{i_0}+\alpha)}) \\
&\quad - N_{-\gamma_{i_0},\,\alpha}(e_{-\gamma_{i_0}+\alpha} - e_{-(-\gamma_{i_0}+\alpha)}),
\end{aligned}
$$

可知 $b_{\gamma_i} = 0$, $b_\alpha = a_\alpha = 0$, $\alpha \neq \gamma_i$, $1 \leq i \leq t$. 因而 $X = 0$. 即 $\mathfrak{a}_1$ 在 $\mathfrak{g}_0 \cap \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{d}_n} \mathfrak{g}_\alpha$ 中极大可换. 故 $\mathfrak{a}$ 为约化 Cartan 子代数. □

现在从 $\mathfrak{a}$ 出发来找包含 $\mathfrak{a}$ 的正则 Cartan 子代数.

定理 2 假设如上, 令

$$\widetilde{\mathfrak{h}_T} = \{X_0 \in \mathfrak{h}_T | (X_0,\ \gamma_i) = 0,\ 1 \leq i \leq t\}.$$

则

$$\widetilde{\mathfrak{h}_0} = \widetilde{\mathfrak{h}_T} + \mathfrak{a}$$

是 $\mathfrak{g}_0$ 的正则 Cartan 子代数.

证 显然 $\widetilde{\mathfrak{h}}$ 是可换子代数. 又 $\widetilde{\mathfrak{h}} \supseteq \mathfrak{a}$. 故若能证明 $\widetilde{\mathfrak{h}}$ 极大可换, 则 $\widetilde{\mathfrak{h}}$ 是正则 Cartan 子代数. 注意到

$$
\begin{aligned}
\dim \widetilde{\mathfrak{h}_0} &= \dim \widetilde{\mathfrak{h}_T} + \dim \mathfrak{a} \\
&= \dim \widetilde{\mathfrak{h}_T} + \dim \mathfrak{h}_T + t \\
&\leq \dim \mathfrak{h}_0,
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\dim \widetilde{\mathfrak{h}_T} &= \dim \mathfrak{h}_T - \dim\{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_t\} \\
&\geq \dim \mathfrak{h}_T - t.
\end{aligned}
$$

于是

$$\dim\widetilde{\mathfrak{h}_0} \geq \dim\mathfrak{h}_T - t + \dim\mathfrak{h}_V + t = \dim\mathfrak{h}_0.$$

故 $\widetilde{\mathfrak{h}}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的正则 Cartan 子代数. □

系 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ 线性无关.

下面我们在 $\widetilde{\mathfrak{h}}_0^C$ 的根系中确定可容许方向. 有了可容许方向就可以给出 Satake 图解了. 由于 $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}_T + \sqrt{-1}\mathfrak{h}_V$ 及 $\widetilde{\mathfrak{h}}_u = \widetilde{\mathfrak{h}}_T + \sqrt{-1}\mathfrak{a}$ 都是 $\mathfrak{u}$ 的 Cartan 子代数, 因而它们在 $\mathfrak{u}$ 的内自同构下是共轭的. 下面我们将此自同构找出来. 并由此而建立 $\widetilde{\mathfrak{h}}_R$ 中的可容许正方向.

对定理 1, 2 中的 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$, 有 $\sqrt{-1}(e_{\gamma_i} + e_{-\gamma_i}) \in \mathfrak{p}_0$. 于是 $(e_{\gamma_i} + e_{-\gamma_i}) \in \mathfrak{u}$. 注意到 $(\gamma_i, \gamma_i) < 0$, 因而

$$\rho_i = e^{\mathrm{ad} X_i} \in \mathrm{Int}\mathfrak{g}_u, \quad 1 \leq i \leq t,$$

其中

$$X_i = \frac{\pi}{2\sqrt{-2(\gamma_i, \gamma_i)}}(e_{\gamma_i} + e_{-\gamma_i}).$$

引理 2 假设如上, 并把 ρ_i 视为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{u}^{\mathfrak{C}}$ 的自同构. 则有

(1) $\rho_i|_{\widetilde{\mathfrak{h}}_T + \mathfrak{h}_{\mathfrak{W}}} = I$;

(2) $\rho_i(\gamma_j) = \gamma_j, \quad i \neq j$;

(3) $\rho_i(\gamma_i) = -\sqrt{-\frac{(\gamma_i, \gamma_i)}{2}}(e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i}) \in \mathfrak{a}$;

(4) $\rho_j(e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i}) = e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i}, \ i \neq j$;

(5) 令 $\rho = \rho_1\rho_2\cdots\rho_t$, 则有

$$\rho(\mathfrak{h}_0) = \widetilde{\mathfrak{h}}_0,$$

$$\rho(\gamma_i) = -\sqrt{-\frac{(\gamma_i, \gamma_i)}{2}}(e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i}),$$

$$\rho|_{\widetilde{\mathfrak{h}}_T + \mathfrak{h}_{\mathfrak{W}}} = I.$$

证 由 $\gamma_i \in \Delta_n^+ \subseteq C_{\mathfrak{p}_0}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{V}})$, $(\gamma_i,\ \widetilde{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{T}}) = 0$ 知

$$\rho_i|_{\widetilde{\mathfrak{h}}_T + \mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}} = \rho|_{\widetilde{\mathfrak{h}}_T + \mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}} = I.$$

由 $\gamma_i \neq \gamma_j$, $\gamma_i \pm \gamma_j \notin \Delta$ 有 $(\gamma_i,\ \gamma_j) = 0$. 于是

$$[\gamma_j,\ e_{\gamma_i} \pm e_{-\gamma_i}] = 0.$$

因而有

$$\rho_i(\gamma_j) = \gamma_j,\ \rho_j(e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i}) = e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i}.$$

即 (1), (2) 及 (4) 均成立. 如果 (3) 成立, 则 $\rho|_{\widetilde{\mathfrak{h}}_T + \mathfrak{h}_{\mathfrak{V}}} = I$, 且

$$\rho(\gamma_i) = \rho_i(\gamma_i) = -\sqrt{-\frac{(\gamma_i,\ \gamma_i)}{2}}(e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i}).$$

即 (5) 成立. 现在证明 (3). 用归纳法可证明下面的递推公式:

$$(\mathrm{ad}\, X_i)^{2k}(\gamma_i) = (-1)^k(\frac{\pi}{2})^{2k}\gamma_i;$$
$$(\mathrm{ad}\, X_i)^{2k+1}(\gamma_i) = (-1)^k(\frac{\pi}{2})^{2k+1}(-\frac{1}{2}(\gamma_i,\ \gamma_i))^{\frac{1}{2}}(e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i}).$$

用这两个递推公式, 可得

$$\begin{aligned}
\rho_i(\gamma_i) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}X_i)^k(\gamma_i) \\
&= (\cos\frac{\pi}{2})\gamma_i + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{-(\gamma_i,\ \gamma_i)}{2}}(e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i}) \\
&= \sqrt{\frac{-(\gamma_i,\ \gamma_i)}{2}}(e_{\gamma_i} - e_{-\gamma_i}).
\end{aligned}$$

因而引理成立. □

由此引理知，我们可在 $\mathfrak{h}_V$ 中，$\mathfrak{a}_1$ 中，$\sqrt{-1}\widetilde{\mathfrak{h}_T}$ 中取基. 决定 $\widetilde{\mathfrak{h}_R}$ 的正方向，$\rho^{-1}(\widetilde{\mathfrak{h}_R})$ 中有相应的方向. 基元素分别在 $\mathfrak{h}_V$, $\rho^{-1}(\mathfrak{a}_1)$ 及 $\sqrt{-1}\widetilde{\mathfrak{h}_T}$ 中. 后两者恰为 $\widetilde{\mathfrak{h}_T}$ 的一组基. 因而有 $\mathfrak{h}_R$ 的正方向及 Π, 是对可容许正方向的素根系. 如此可作出 Satake 图.

定理 3 两个实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 若有相同的 Satake 图，则 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 同构. 即 Satake 图是全系不变量.

证 因 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 的 Satake 图相同，故 $\mathfrak{g}_1^C$ 与 $\mathfrak{g}_2^{\mathfrak{C}}$ 有相同的 (同构意义下) 素根系，即 $\mathfrak{g}_1^C$ 与 $\mathfrak{g}_2^{\mathfrak{C}}$ 同构. 因而可设 $\mathfrak{g}_i$ 对应的 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i, \quad i = 1, 2$$

满足

$$\mathfrak{k}_1 + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{u}.$$

而且 $\mathfrak{g}_i$ 的 Satake 图是由 $\mathfrak{g}_i$ 的 T- 正常 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_i$ 按照上述办法得到的正则 Cartan 子代数 $\widetilde{\mathfrak{h}}_i$ 所决定. 于是在等价意义下有 Δ_1, $\widetilde{\Delta}_1$ 与 Δ_2, $\widetilde{\Delta}_2$ 相同. 其中 Δ_i, $\widetilde{\Delta}_i$ 是 $\mathfrak{g}_i^{\mathfrak{C}} = u^{\mathfrak{C}}$ 对 $\mathfrak{h}_i$, $\widetilde{\mathfrak{h}}_i$ 的根系. 由上面的讨论可知 $\dim \mathfrak{h}_{1T} = \dim \mathfrak{h}_{2T}$, 且 $\mathfrak{k}_i$ 对 $\mathfrak{h}_{iT}$ 有相同的根系. 因而 $\mathfrak{k}_1 \approx \mathfrak{k}_2$. 故有 $\mathfrak{g}_1 \approx \mathfrak{g}_2$. □

这个定理说明实半单 Lie 代数也可按 Satake 图分类. 下节具体给出典型实单李代数的 Satake 图.

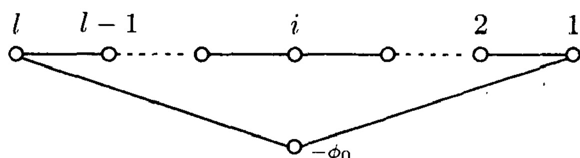
4.21 典型实单李代数的 Satake 图

在本节中我们用典型李代数的根系的标准符号. 对合自同构为

$$t = t_0 e^{\mathrm{ad} H}.$$

4.21.1 A_l

A_l 伴随表示的扩充图为



1. $t_0 = I$. A_l 的素根系为 α_1, α_2, ..., α_l. 这里

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}, \ 1 \leq i \leq l.$$

次序是

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{l+1}.$$

将 3.5 的命题 2 后 A_l 中取 $\alpha = \alpha_i$ 的实李代数记为 A_l^i. 其特征子代数 $\mathfrak{k}_0$ 的素根系是

$$\{\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_{i-1}, \ \alpha_{i+1}, \ \ldots, \ \alpha_l\}.$$

Δ_n^+ 为 $\gamma(A_{i-1}) \times \gamma(A_{l-i})$ 的权.

$\gamma(A_{i-1})$ 的权是 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_i$.

$\gamma(A_{l-i})$ 的权是 $-\lambda_{l+1} > -\lambda_l > \cdots > -\lambda_{i+1}$.

所以 $\gamma(A_{i-1}) \times \gamma(A_{l-i})$ 的权是上面权的和，其首权为

$$\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_{l+1}.$$

易知 4.3 中所求的子集 $\mathfrak{a}_0$ 为

$$\{\gamma_t = \lambda_t - \lambda_{l-t+2}, \quad 1 \leq t \leq i\}.$$

在此集中定义次序

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_i.$$

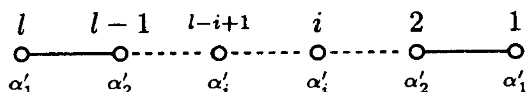
令 $\gamma'_t = \frac{\gamma_t}{(\gamma_t,\ \gamma_t)}$, 则

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_2)' &= \sum_t (\lambda_1 - \lambda_2,\ \lambda_t - \lambda_{l+1-t})\gamma'_t \\ &= (l+1)(\gamma'_1 - \gamma'_2)\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\begin{aligned}&\alpha'_t = (l+1)(\gamma'_t - \gamma'_{t+1}),\ \ 1 \le t \le i-1; \\ &\alpha'_i = (l+1)\gamma'_i; \\ &\alpha_s = 0,\ \ i+1 \le s \le l-i; \\ &\alpha'_{l-t+1} = \alpha'_t,\ \ 1 \le t \le i-1.\end{aligned}$$

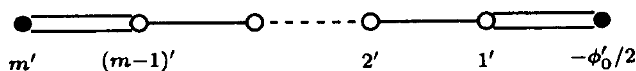
因此， Satake 图是



未标出的点属于 Π_0.

2. $t_0 \neq I$.

1) $l = 2m$. 图是



$\mathfrak{g}$ 的伴随表示的首权 $\varphi = \lambda_1 - \lambda_{l+1}$, 因为 $t_0(\varphi) = \varphi$, 所以 $\varphi \in \mathfrak{h}_o^+$, 即 $\varphi \notin \Delta_0$. 而 φ' 不是 $\mathfrak{k}_0$ 的根, 故知 $\varphi \in \Delta_n^+$. 取 $\gamma_1 = \varphi = \lambda_1 - \lambda_{l+1}$. 同样可得

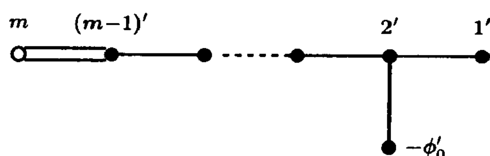
$$\gamma_2 = \varphi - \alpha_1 - \alpha_l = \lambda_2 - \lambda_l, \ \ldots, \ \gamma_m = \lambda_m - \lambda_{m+2}.$$

所以 $\mathfrak{h}_o = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{R}\gamma_i$, 即 $\dim \mathfrak{h}_o = m$. 而

$$\dim \mathfrak{h}_o^+ = \dim \mathfrak{h}_o^- = m,$$

所以这时是正规实形式, 它的 Satake 图与 $\mathfrak{g}$ 的图一致.

2) $l = 2m - 1$. 图是



(i) α 是标号为 m 的点.

这时表示 $\gamma_1^2(D_m)$ 的首权是

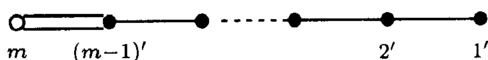
$$-\alpha_m = \lambda_{m+1} - \lambda_m \in \mathfrak{h}_o^+.$$

取 $\gamma_1 = -\alpha_m = \lambda_{m+1} - \lambda_m$, 则

$$\gamma_2 = -\alpha_m - \alpha_{m-1} - \alpha_{m+1} = \lambda_{m+2} - \lambda_{m-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\gamma_m = \lambda_{2m} - \lambda_1.$$

所以 $\dim \mathfrak{h}_o = m$, 而 $\dim \mathfrak{h}_o^- = m - 1$, 所以 $\mathfrak{a}_0 = 2m - 1 = l$. 因此是正规实形式.

(ii) $\mathfrak{k}_0 = \gamma_2(C_m)$. 扩充图为



因为 $t_0(\alpha_i) = \alpha_{l-i+1}$. 只当有 $i = m$ 时 $t_0(\alpha_m) = \alpha_m$, 其余的 $t_0(\alpha_i) \neq \alpha_i$ $(i \neq m)$, 所以 $\alpha_i \in \Delta_0$, 因此 $\alpha_i \notin \Delta_n$, $(i \neq m)$. 而 $t_0(\alpha_{2m}) = \alpha_{2m}$. 因此 $\alpha_m \in \Delta_c$. 故 $\Delta = \Delta_1$, 即 $\Delta_n = \emptyset$. 因此 $\mathfrak{h}_o^- = \mathfrak{a}_o$. 因为

$$t_0(\alpha_i) = \alpha_{l+1-i}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l,$$

所以

$$t_0(\lambda_i) = -\lambda_{l+2-i}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l;$$
$$t_0(\lambda_i + \lambda_{l+2-i}) = -(\lambda_i + \lambda_{l+2-i}).$$

因此

$$\tilde{\gamma}_1 = \lambda_1 + \lambda_{l+1},\ \tilde{\gamma}_2 = \lambda_2 + \lambda_l,\ \ldots,\ \tilde{\gamma}_{m-1} = \lambda_{m-1} + \lambda_{m+2}$$

构成 $\mathfrak{h}_o^-$ 的基可以将 $(1,\ 2,\ \ldots,\ l+1)$ 作一定的置换, 即施用 Weyl 群的元素作如下对应:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\gamma}_1 \to \gamma_1 = \lambda_1 + \lambda_2,\\
&\tilde{\gamma}_2 \to \gamma_2 = \lambda_3 + \lambda_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\tilde{\gamma}_{m-1} \to \gamma_{m-1} = \lambda_{l-2} + \lambda_{l-1}.
\end{aligned}$$

于是得到

$$\alpha_1' = 0,$$
$$\alpha_2' = (l-1)(\gamma_1' - \gamma_2'),$$

$$\alpha'_3 = 0,$$

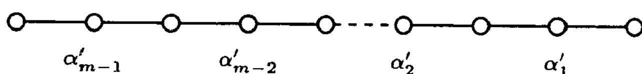
$$\alpha'_4 = (l-1)(\gamma'_2 - \gamma'_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots.$$

令次序为

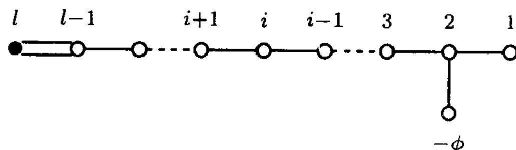
$$\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_{m-1} > 0.$$

得 Satake 图为



4.21.2 B_l

扩充图为



取 α 是标号 i 的点， $i = 2, 3, \ldots, l-1$. 则 $\mathfrak{k}_0 = \gamma_1(B_{l-i}) \times \gamma_1(D_i)$, 其特征子代数的素根系为

$$\alpha_{i-1}, \alpha_{i-2}, \ldots, \alpha_l, -\varphi; \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_l.$$

这些素根系决定于排列

$$\lambda_i < \lambda_{i-1} < \cdots < \lambda_2 < \lambda_1;$$

$$\lambda_{i+1} > \lambda_{i+2} > \cdots > \lambda_l.$$

表示 $\gamma_1(B_{l-i})\times\gamma_1(D_i)$ 的权分别是表示 $\gamma_1(B_{l-i})$ 与表示 $\gamma_1(D_i)$ 的权的和. 可以将两者的权作排列如下

$$-\lambda_{i+1} < -\lambda_{i+2} < \cdots < -\lambda_l < 0 < \lambda_l < \cdots \lambda_{i+1};$$
$$\lambda_i < \lambda_{i-1} < \cdots \lambda_1 < -\lambda_1 < -\lambda_2 < \cdots < -\lambda_{i-1} < -\lambda_i.$$

首权是 $\lambda_{i+1}-\lambda_i$. 比 $\lambda_{i+1}-\lambda_i$ 低的权依次为:

$$\begin{array}{llll}\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}, & \lambda_{i+1}-\lambda_{i-2}, & \ldots, & \lambda_{i+1}-\lambda_1; \\ \lambda_{i+1}+\lambda_{i-1}, & \lambda_{i+1}+\lambda_{i-2}, & \ldots, & \lambda_{i+1}+\lambda_1.\end{array}$$

其中 $\lambda_{i+1}+\lambda_i$ 是 $\mathbf{Q}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)$ 的首根, 这样得到

$$\gamma_1=\lambda_{i+1}-\lambda_i,\ \gamma_{-1}=\lambda_{i+1}+\lambda_i.$$

1. 如果 $2i<l$, 可以依此类推, 得

$$\gamma_t=\lambda_{i+t}-\lambda_{i-t-1},\ \gamma_{-t}=\lambda_{i+t}+\lambda_{i-t-1},\quad 2\le t\le i.$$

所以 $\{\gamma_1,\ \gamma_{-1},\ \ldots,\ \gamma_i,\ \gamma_{-i}\}$ 是所求的集合. $\dim\mathfrak{a}_0=2i$. 从 λ_k 的定义假定

$$(\lambda_k,\ \lambda_j)=\delta_{kj},\quad 1\le k,j\le l.$$

重新排一下次序. 令

$$\gamma_t=\lambda_{2i+1-t}+\lambda_t,\ \gamma_{-t}=\lambda_{2i+1-t}-\lambda_t\quad 1\le t\le i.$$

由于

$$(\lambda_t-\lambda_{t+1})'=0,\ 2i+1\le t\le l-1;\ \lambda_l'=0,$$

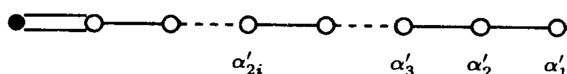
所以只有

$$\lambda_1-\lambda_2,\ \lambda_2-\lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_{2i}-\lambda_{2i+1}\in\Pi\setminus\Pi_0.$$

而这些素根的个数等于 $\dim \mathfrak{a}_0 = 2i$. 于是总可以取次序使得

$$(\lambda_1 - \lambda_2)' > 0,\ (\lambda_2 - \lambda_3)' > 0,\ \ldots,\ (\lambda_{2i} - \lambda_{2i+1})' > 0.$$

因此 Satake 图为



2. 如果 $2i \geq l$, 这时我们可以对权 λ_i 应用一个 Weyl 群的元素使得

$$S:\ \lambda_i \to \lambda_{l-i+1},\quad 1 \leq i \leq l.$$

于是权的次序有排列

$$-\lambda_{i+1} < -\lambda_{i+2} < \cdots < -\lambda_l < \lambda_l < \cdots < \lambda_{i+1}$$

$$\lambda_i < \lambda_{i-1} < \cdots < \lambda_1 < 0 < -\lambda_1 < \cdots < -\lambda_i.$$

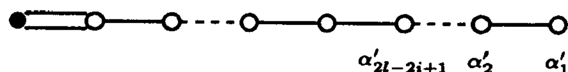
同样, 下面的根就是我们所求的集合

$$\lambda_{i+t} \pm \lambda_{i-t+1},\ \lambda_{2i+1},\ 1 \leq t \leq i.$$

所以 $\dim \mathfrak{a}_0 = 2l - 2i + 1$.

$$(\lambda_{2l-2i-s} - \lambda_{2l-i-s-1})' = (\lambda_l)' = 0,\ s = 2,\ 3, \ldots.$$

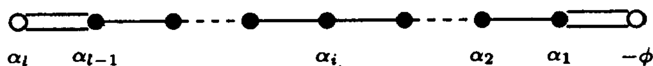
于是 Satake 图为



3. 对于 $i = 1$, 及 $i = l$ 上面的图也成立.

4.21.3 C_l

扩充图为



$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1},\ 1 \le i \le l-1;$$

$$\alpha_l = 2\lambda_l;$$

$$-\varphi = 2\lambda_1.$$

取 α 是标号为 i 的点, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l-1$. 则

$$\mathfrak{k}_0 = \gamma_1(C_i) \times \gamma_1(C_{l-i}).$$

可以将 $\gamma_1(C_i)$ 的权排列为

$$\lambda_i < \lambda_{i-1} < \cdots < \lambda_2 < \lambda_1.$$

将 $\gamma_1(C_{l-i})$ 的权排列为

$$\lambda i + 1 > \lambda_{i+2} > \cdots > \lambda_l.$$

依照 B_l^i 的情形分别排列为

$$-\lambda_{i+1} < -\lambda_{i+2} < \cdots < -\lambda_l < \lambda_l < \cdots < \lambda_{i+1};$$

$$\lambda_i < \lambda_{i-1} < \cdots < \lambda_1 < 0 < -\lambda_1 < \cdots < -\lambda_i.$$

首权是 $\lambda_{i+1} - \lambda_i$. 依此类推, 可以求得所需的集合为

$$\lambda_{i+t} - \lambda_{i+1-t},\ 1 \le t \le i;\ 2i < l.$$

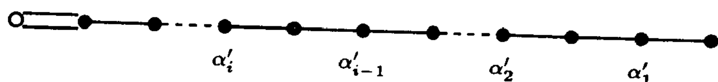
所以秩为 i. 利用 Weyl 群的元素可以将上面的根分别对应着

$$\gamma_t = \lambda_{2t-1} + \lambda_{2t},\ 1 \le t \le i.$$

1. 若 $2i < l$, 则

$$\begin{aligned}
&\alpha'_{2k-1} = 0, \\
&\alpha'_{2k} = \gamma_k - \gamma_{k+1}, \quad 1 \le k \le i; \\
&\alpha'_j = 0, \qquad\qquad\qquad j > i.
\end{aligned}$$

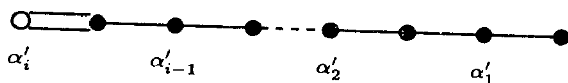
于是 Satake 图为



2. 若 $2i = l$, 则

$$\begin{aligned}
&\alpha'_{2k-1} = 0, \\
&\alpha'_{2k} = \gamma_k - \gamma_{k+1}, \quad 1 \le k \le i-1; \\
&\alpha'_{l-1} = 0, \\
&\alpha'_l = \gamma_i.
\end{aligned}$$

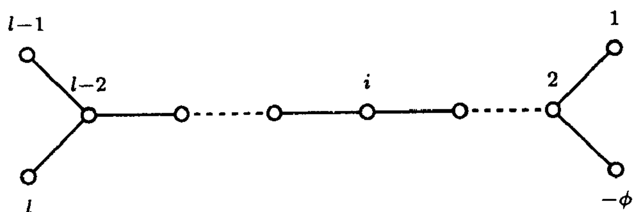
所以 Satake 图为



3. 对于取 α 为标号 l 的点, 则 $\mathfrak{k}_0 = T \times \gamma_1^2(A_{l-1})$ 是正规实形式, 不再讨论.

4.21.4 D_l

扩充图为



1. $t_0 = I$ 的情形.

(1) 当 α 取标号为 i 的点， $2 \leq i \leq l-2$, 则 $\mathfrak{k}_0 = \gamma_1(D_i) \times \gamma_1(D_{l-i})$.

(i) $2i+1 < l$ 时，将 $\gamma_1(D_i)$ 的权表为

$$-\lambda_i > -\lambda_{i-1} > \cdots > -\lambda_1 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_i;$$

将 $\gamma_1(D_{l-i})$ 的权表为

$$\lambda_{i+1} > \lambda_{i+2} > \cdots > \lambda_l > -\lambda_l > \cdots > -\lambda_{i+1}.$$

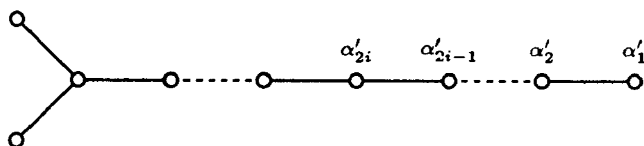
首权是 $\lambda_{i+1} - \lambda_i$. 利用 B_l 的方法，可求得所需根的集合为

$$\lambda_{i+t} \pm \lambda_{i+1-t},\ t \leq 1 \leq i.$$

所以 $\dim \mathfrak{a}_0 = 2i$.

$$\alpha'_j = 0, \quad 2i+1 \leq j \leq l.$$

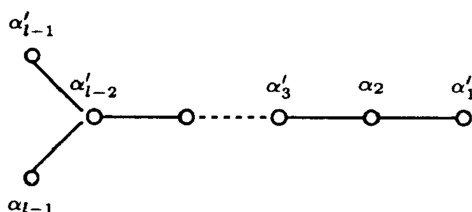
因此 Satake 图为



(ii) 当 $2i+1=l$ 时,

$$\alpha'_{l-1}\alpha'_l=\gamma_1+\gamma_{-1},$$

其中 $\gamma_{\pm 1}=\lambda_{l-1}\pm\lambda_l$. Satake 图为



(iii) $2i=l$ 时, 是正规实形式.

(2) 取 α 为标号 1 的点, 可以归结于 (1) (i) 的情形.

(3) 取 α 为标号 $l-1$ 或 l 的点, 则 $\mathfrak{k}_0=T\times\gamma_2(A_{l-1})$. A_{l-1} 的素根为

$$\alpha_t=\lambda_t-\lambda_{t+1},\quad 1\le t\le l-1.$$

$\gamma_2(A_{l-1})$ 的首权是 $\lambda_1+\lambda_2$. 可知

$$\pm(\lambda_k+\lambda_j)\in\Delta_n,\quad k\ne j,\ 1\le k,j\le l.$$

所以 $\lambda_k + \lambda_j \in \Delta_n^+$. 因此所求根的集合为

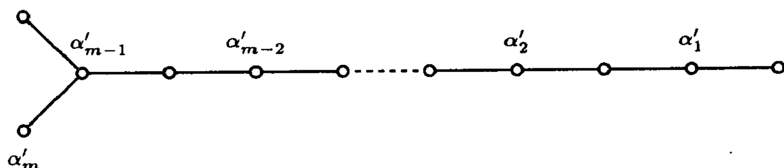
$$l = 2m, \quad \lambda_{2t-1} + \lambda_{2t}, \quad 1 \le t \le m;$$

$$l = 2m+1, \quad \lambda_{2t-1} + \lambda_{2t}, \quad 1 \le t \le m.$$

(i) $l = 2m$ 时,

$$\begin{aligned} &\alpha'_{2k-1} = 0; \\ &\alpha'_{2k} = \gamma_k - \gamma_{k+1}, \quad 1 \le k \le m-1; \\ &\alpha'_{l-1} = 0; \\ &\alpha'_l = 2\gamma_m. \end{aligned}$$

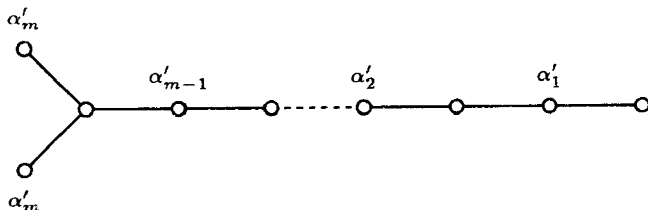
Satake 图为



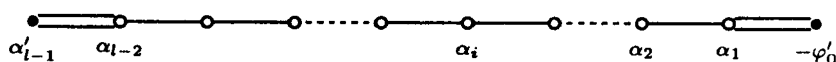
(ii) $l = 2m+1$ 时,

$$\begin{aligned} &\alpha'_{2k-1} = 0; \\ &\alpha'_{2k} = \gamma_k - \gamma_{k+1}, \quad 1 \le k \le m-1; \\ &\alpha'_{l-2} = 0; \\ &\alpha'_{l-1} = \alpha'_l = \gamma_m. \end{aligned}$$

Satake 图为



2. $\mathfrak{t}_0 \neq I$ 的情形，$\mathfrak{t}_0$ 对应的实李代数的扩充图为



(1) 取 α 是标号为 i $(1 \leq i \leq l-2)$ 的点，则

$$\mathfrak{t}_0 = \gamma_1(B_i) \times \gamma_1(B_{l-i-1}).$$

$\gamma_1(B_i)$ 的权可依次排列为

$$-\lambda_i > -\lambda_{i-1} > \cdots > -\lambda_1 > 0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_i;$$

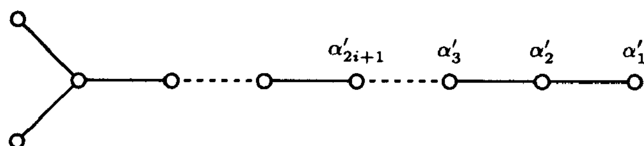
而 $\gamma_1(B_{l-i-1})$ 的权为

$$\lambda_{i+1} > \lambda_{i+2} > \cdots > \lambda_l > 0 > -\lambda_l > \cdots > -\lambda_{i+1}.$$

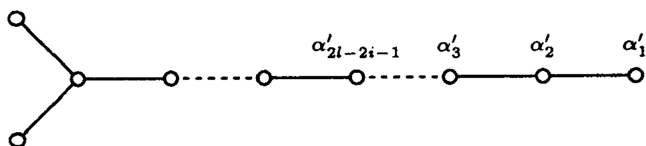
(i) $2i < l$ 时，所求根的集合为

$$\{\lambda_{i+1} \pm \lambda_i,\ \lambda_{i+2} \pm \lambda_{i-1},\ \ldots,\ \lambda_{2i} \pm \lambda_1,\ \lambda_{2i+1}\}.$$

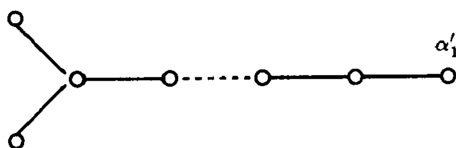
用同 B_l 的方法可以得到 Satake 图



(ii) 对于 $2i \geq l$, Satake 图为

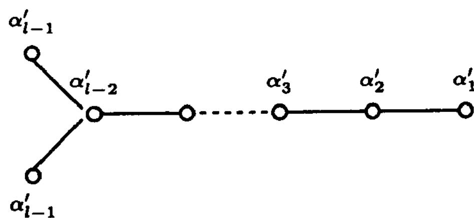


(2) 对于 $\mathfrak{k}_0=\gamma_1(B_{l-1})$, 其 Satake 图为



(3) 分两种情形.

(i) $l=2m$, $i=m$ 时, $\mathfrak{k}_0=\gamma_1(B_{m-1})\times\gamma_1(B_m)$. Satake 图为



(ii) $l=2m+1$, $i=m$ 时, $\mathfrak{k}_0=\gamma_1(B_m)\times\gamma_1(B_m)$ 是正规实形式.

例外复单李代数的实形式所对应的图也可以如此求出. 可参看 [37]. 这里不再叙述.

第五章 实现和自同构

前面我们已经完成了实单李代数的分类，也就完成了实半单李代数的分类. 本章我们讨论实半单李代数中的若干问题. 诸如第一类典型实单李代数的实现，实半单李代数自同构，拟内自同构， Weyl 群，实半单李代数的某些应用等.

5.1 第一类实单李代数的实现

我们考虑实数域或复数域上 n 阶方阵. 设 A 是 n 阶方阵，分别以 ${}^tA$ 与 $\bar{A}$ 表示 A 的转置与共轭. A 称为反对称的，若 ${}^tA+A=0$. A 称为对称的，若 ${}^tA=A$. A 是实的，若 $\bar{A}=A$. A 称为 Hermite 的，若 ${}^tA=\bar{A}$. A 称为反 Hermite 的，若 ${}^tA+\bar{A}=0$.

以 E_{ij} 表示方阵 $(\delta_{ki}\delta_{lj})_{1\leq k,\, l\leq n}$. $I_n=\sum\limits_{i=1}^{n}E_{ii}$ 为 n 阶单位方阵. 又令

$$I_{pq}=-\sum_{i=1}^{p}E_{ii}+\sum_{j=p+1}^{p+q}E_{jj}=\begin{pmatrix}-I_p & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix};$$

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} E_{in+i} - \sum_{i=n+1}^{2n} E_{ii-n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix};$$

$$K_{pq} = -\sum_{i=1}^{p} E_{ii} + \sum_{i=p+1}^{p+q} E_{ii} - \sum_{i=p+q+1}^{2p+q} E_{ii}$$

$$+ \sum_{i=2p+q+1}^{2(p+q)} E_{ii}$$

$$= \begin{pmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

域 $\mathbf{C}$ 或域 $\mathbf{R}$ 上所有 n 阶方阵集合以 $gl(n, \mathbf{C})$ 或 $gl(n, \mathbf{R})$ 表示之. 方阵 A 的行列式以 $\det A$ 表示之.

令

$$GL(n, \mathbf{C}) = \{A \in gl(n, \mathbf{C}) | \det A \neq 0\},$$

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{A \in gl(n, \mathbf{R}) | \det A \neq 0\}.$$

它们对矩阵的乘法成群, 称为 **(复、实) 一般线性群**. 其李代数分别为 $gl(n, \mathbf{C})$, $gl(n, \mathbf{R})$.

$$SL(n, \mathbf{C}) = \{A \in GL(n, \mathbf{C}) | \det A = 1\},$$

$$SL(n, \mathbf{R}) = \{A \in GL(n, \mathbf{R}) | \det A = 1\}.$$

它们分别是 $GL(n, \mathbf{C})$, $GL(n, \mathbf{R})$ 的正规闭子群, 称为 **(复、实) 特殊线性群**. 李代数分别为

$$sl(n, \mathbf{C}) = \{A \in gl(n, \mathbf{C}) | \mathrm{tr} A = 0\},$$

$$sl(n,\ \mathbf{R}) = \{A \in gl(n,\ \mathbf{R}) | \mathrm{tr}A = 0\}.$$

令

$$U(p,\ q) = \{g \in GL(p+q,\ \mathbf{C}) | {}^t\bar{g} I_{pq} g = I_{pq}\},$$

$$U(n) = U(0,\ n) = U(n,\ 0) = \{g \in GL(n,\ \mathbf{C}) | {}^t\bar{g} g = I_n\},$$

分别称为 $(p,\ q)$ **型酉群和酉群**.

若将 $GL(n,\ \mathbf{C})$ 看作实李群. 则 $U(p,\ q)$ 为其闭子群. 维数为 $(p+q)^2$. $U(p,\ q)$ 的李代数为

$$u(p,\ q) = \{A \in gl(p+q,\ \mathbf{C}) | {}^t\bar{A} I_{pq} + I_{pq} A = 0\},$$

$$u(n) = \{A \in gl(n,\ \mathbf{C}) | {}^t\bar{A} + A = 0\}.$$

即 $u(n)$ 的元素由反 Hermite 矩阵构成构成.

令

$$SU(p,\ q) = U(p,\ q) \cap SL(p+q,\ \mathbf{C}),$$

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n,\ \mathbf{C}),$$

分别称为 $(p,\ q)$ **型特殊酉群**, **特殊酉群**. 其李代数为

$$su(p,\ q) = \{A \in u(p,\ q) | \mathrm{tr}A = 0\} = u(p,\ q) \cap sl(p+q,\ \mathbf{C}),$$

$$su(n) = u(n) \cap sl(n,\ \mathbf{C}),$$

令

$$SO(n,\ \mathbf{C}) = \{g \in SL(n,\ \mathbf{C}) | {}^t g g = I_n\},$$

$$SO(n,\ \mathbf{R}) = \{g \in SL(n,\ \mathbf{R}) | {}^t g g = I_n\},$$

分别称为 **复特殊正交群与 (实) 特殊正交群**. 它们的李代数为

$$so(n,\ \mathbf{C}) = \{A \in sl(n,\ \mathbf{C}) | {}^t A + A = 0\},$$

$$so(n, \mathbf{R}) = \{A \in sl(n, \mathbf{R}) | {}^tA + A = 0\}.$$

令

$$SO(p, q) = \{g \in SL(p+q, \mathbf{R}) | {}^tgI_{pq}g = I_{pq}\}.$$

显然

$$SO(n) = SO(0, n) = SO(0, n),$$

称为 (p, q) **型特殊** Lorentz **群**. 李代数为

$$so(p, q) = \{A \in sl(p+q, \mathbf{R}) | {}^tAI_{pq} + I_{pq}A = 0\}.$$

令

$$SP(n, \mathbf{C}) = \{g \in GL(2n, \mathbf{C}) | {}^tgJ_ng = J_n\},$$

$$SP(n, \mathbf{R}) = \{g \in GL(2n, \mathbf{R}) | {}^tgJ_ng = J_n\},$$

$$SP(p, q) = \{g \in SP(p+q, \mathbf{C}) | {}^tgK_{pq}\bar{g} = K_{pq}\},$$

$$SP(n) = SP(0, n) = SP(n, 0) = SP(n, \mathbf{C}) \cap U(2n).$$

分别称为 **复辛群**, **实辛群**, (p, q) **型辛群** 及 **辛群**. 它们的李代数分别为

$$sp(n, \mathbf{C}) = \{A \in gl(2n, \mathbf{C}) | {}^tAJ_n + J_nA = 0\},$$

$$sp(n, \mathbf{R}) = \{A \in gl(2n, \mathbf{R}) | {}^tAJ_n + J_nA = 0\},$$

$$sp(p, q) = \{A \in sp(p+q, \mathbf{C}) | {}^tAK_{pq} + K_{pq}\bar{A} = 0\},$$

$$sp(n) = sp(n, \mathbf{C}) \cap u(2n).$$

令

$$
\begin{aligned}
&SO^*(2n)\\
&=\{g\in GL(n,\ \mathbf{C})|\det g=1,\ {}^tgJ_n\bar{g}=J_n,\ {}^tgg=I_{2n}\}\\
&=\{g\in SO(2n,\ \mathbf{C})|{}^tgJ_n\bar{g}=J_n\}.
\end{aligned}
$$

在 $\mathbf{C}^{2n}$ 中定义变换 ψ:

$$
\begin{aligned}
&\psi(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ z_{n+1},\ \cdots,\ z_{2n})\\
&=(\bar{z}_{n+1},\ \cdots,\ \bar{z}_{2n},\ -\bar{z}_1,\ -\bar{z}_2,\ \cdots,\ -\bar{z}_n).
\end{aligned}
$$

最后，令

$$
SU^*(2n)=\{g\in SL(2n,\ \mathbf{C})|g\psi=\psi g\}.
$$

$SO^*(2n)$, $SU^*(2n)$ 分别称为 **特殊正交星群** 与 **特殊酉星群**. 它们的李代数分别为

$$
\begin{aligned}
&so^*(2n)\\
&=\{A\in gl(2n,\ \mathbf{C})|{}^tAJ_n+J_n\bar{A}=0,\ {}^tA+A=0\},\\
&su^*(2n)=\{A\in sl(2n,\ \mathbf{C})|A\psi=\psi A\}\\
&=\{A\in sl(2n,\ \mathbf{C})|\bar{A}J_n=J_nA\}.
\end{aligned}
$$

我们已经知道

$$
GL(n,\ \mathbf{C}),\ SL(n,\ \mathbf{C}),\ SL(n,\ \mathbf{R}),\ SO(n,\ \mathbf{C}),
$$

$$
SO(n),\ SU(n),\ U(n),\ SP(n,\ \mathbf{C}),\ SP(n)
$$

都是连通李群. 而 $GL(n,\ \mathbf{R})$ 有两个连通分支. 一个行列式为正，另一个行列式为负. 详细证明可见 [10].

引理 1 以 $\approx$ 表示拓扑同构，$\sim$ 表示同胚，则我们有

(1) $SO(2n)\cap SP(n)\approx U(n)$;

(2) $SP(p,\ q)\cap U(2p+2q)\approx SP(p)\times SP(q)$;

(3) $SP(n,\ \mathbf{R})\cap U(2n)\approx U(n)$;

(4) $SO^*(2n)\cap U(2n)\approx U(n)$;

(5) $SU(p,\ q)\cap U(p+q)\ = S(U_p\times U_q)$
$\sim SU(p)\times T\times SU(q)$;

(6) $SU^*(2n)\cap U(2n)=SP(n)$;

其中 $A\in S(U_p\times U_q)$ 当且仅当

$$A=\mathrm{diag}\,(g_1,\ g_2),\ g_1\in U(p),\ g_2\in U(q);\quad \det A=1.$$

T 为一维环面，即 mod 1 的复数乘法群.

证 (1) $g\in SO(2n)\cap SP(n)$, 设

$$g=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

于是有 ${}^tg=I_{2n}$, ${}^tg\bar{g}=I_{2n}$, ${}^tgJ_ng=J_n$. 因而有 $\bar{g}=g$. 且 ${}^tg=g^{-1}$, $J_ng=gJ_n$. 故

$$A=D,\ \ B=-C;$$

$$A^tA+B^tB=I_n,\ A^tB-B^tA=0.$$

即

$$(A+\sqrt{-1}B)\cdot{}^t(A-\sqrt{-1}B)=I_n,$$

即 $A+\sqrt{-1}B\in U(n)$. 因而 (1) 成立.

(2) 为证明 (2), 令

$$V=\{g\in GL(2p+2q)|{}^tgK_{pq}\bar{g}=K_{pq}\}.$$

则有

$$SP(p,\ q) = SP(p+q,\ \mathbf{C}) \cap V.$$

$$SP(p,\ q) \cap U(2p+2q)$$
$$= SP(p+q,\ \mathbf{C}) \cap V \cap U(2p+2q).$$

于是 $g \in SP(p,\ q) \cap U(2p+2q)$ 当且仅当

$${}^t g K_{pq} \bar{g} = K_{pq},\ {}^t g \bar{g} = I_{2p+2q},\ {}^t g J_{p+q} g = J_{p+q}.$$

亦即有

$${}^t\bar{g} = g^{-1},\ K_{pq} g = g K_{pq},\ {}^t g J_{p+q} g = J_{p+q}.$$

令

$$g = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}.$$

由 $gK_{pq} = K_{pq} g$ 得到 $X_{ij} = 0$, 当 $i + j \equiv 1(\mathrm{mod} 2)$,

$$g = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & X_{13} & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 & X_{24} \\ X_{31} & 0 & X_{33} & 0 \\ 0 & X_{42} & 0 & X_{44} \end{pmatrix}.$$

再由 ${}^t\bar{g} g = I_{2p+2q}$, 得

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{13} \\ X_{31} & X_{33} \end{pmatrix} \in U(2p),\ \begin{pmatrix} X_{22} & X_{24} \\ X_{42} & X_{44} \end{pmatrix} \in U(2q).$$

再由 ${}^t g J_{p+q} g = J_{p+q}$, 得

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{13} \\ X_{31} & X_{33} \end{pmatrix} \in SP(p,\ \mathbf{C}) \cap U(2p) = SP(p).$$

$$\begin{pmatrix} X_{22} & X_{24} \\ X_{42} & X_{44} \end{pmatrix} \in SP(q,\ \mathbf{C}) \cap U(2q) = SP(q).$$

于是 (2) 成立.

(3) 因为 $SP(n,\ \mathbf{R}) \cap U(2n) = SP(n) \cap SO(2n) \approx U(n)$.

(4) 因为 $g \in SO^*(2n)$ 当且仅当 ${}^t g J_n \bar{g} = J_n$, ${}^t g g = I_{2n}$, 故

$$\begin{aligned} SO^*(2n) \cap U(2n) &= SO(2n) \cap SP(n,\ \mathbf{C}) \\ &= SO(2n) \cap SP(n) \approx U(n). \end{aligned}$$

(5) $g \in SU(p,\ q) \cap U(p+q)$ 当且仅当

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix},$$

这里 $g_1 \in U(p)$, $g_2 \in U(q)$, $\det g_1 \det g_2 = 1$. 故由

$$g_i = \begin{pmatrix} \det g_i & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma_i.$$

$\gamma_1 \in SU(p)$, $\gamma_2 \in SU(q)$, 有映射

$$g \longrightarrow (\gamma_1,\ \det g_1,\ \gamma_2)$$

将 $SU(p,\ q) \cap U(p+q)$ 映入 $SU(p) \times T \times SU(q)$. 这是连续, 一一, 到上的映射, 但不是同态. 因而 (5) 成立.

(6) $g \in SU^*(2n) \cap U(2n)$ 当且仅当 $\bar{g} J_n = J_n g$, ${}^t g \bar{g} = I_{2n}$, $\det g = 1$, 即 ${}^t g J_n g = J_n$, ${}^t g \bar{g} = I_{2n}$. 即当且仅当 $g \in SP(n,\ \mathbf{C}) \cap U(2n) = SP(n)$. 即 (6) 成立. □

在进一步讨论所述群的性质之前，需要两个结果.

1. 设 $c_j \in \mathbf{C}$, $b_j \in \mathbf{R}$, $Q(t)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j e^{b_j t}$, 则

$$Q(t)=0,\ \forall t \in \mathbf{Z},\ 当且仅当\ Q(t)=0,\ \forall t \in \mathbf{R}.$$

事实上，可以假定 $b_i \neq b_j$, 当 $i \neq j$ 时，考虑 n 维向量

$$\beta_j=(1,\ e^{b_j},\ e^{2b_j},\ \cdots,\ e^{(n-1)b_j}),\quad j=1,\ \cdots,\ n.$$

于是有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \beta_j=(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{b_j \cdot 0},\ \sum_{j=1}^{n} c_j e^{b_j \cdot 1},\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{n} c_j e^{(n-1)b_j})=0.$$

但是 $\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n$ 线性无关. 故 $c_j=0$, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 因而 $Q(t)=0$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

2. 令

$$p(n)=\{A \in gl(n,\ \mathbf{C}) | {}^t A=\bar{A}\},$$
$$P(n)=\{A \in gl(n,\ \mathbf{C}) | {}^t A=\bar{A},\ A>0\}.$$

则 $\exp: p(n) \to P(n)$ 是到上的同胚映射.

设 $A \in p(n)$, 于是由 ${}^t A=\bar{A}$ 知 A 的特征根为实数. 故 $\exp A$ 的特征根 >0. 又

$$^t(\exp A)=\exp {}^t A=\exp \bar{A}=\overline{\exp A}.$$

因而 $\exp A \in P(n)$.

反之，若 $P \in P(n)$, 则有 $U \in u(n)$ 使

$$UPU^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n),\quad \lambda_i>0.$$

故 $\mu_i = \ln \lambda_i \in \mathbf{R}$. 令

$$\begin{aligned} A &= U^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)U \\ &= {}^t\bar{U}\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)U. \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} {}^tA &= {}^tU\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)\bar{U} \\ &= \overline{{}^t\bar{U}\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)U} \\ &= \bar{A}, \end{aligned}$$

$$UPU^{-1} = \exp\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n),$$

$$\begin{aligned} P &= U^{-1}(\exp\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n))U \\ &= \exp(U^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)U) \\ &= \exp A. \end{aligned}$$

因而映射 exp 将 $p(n)$ 映到 $P(n)$ 上. 设有 $A' \in p(n)$ 亦使 $P = \exp A'$. 设 α_i 是 A 之属于 μ_i 的特征向量, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关. 又设 α' 是 A' 的属于特征值 μ' 的特征向量. $\alpha' = \sum x_i\alpha_i$. 即有

$$P\alpha' = (\exp A')\alpha' = e^{\mu'}\alpha' = \sum x_i e^{\mu'}\alpha_i.$$

另一方面, 有

$$P\alpha' = (\exp A')\sum x_i\alpha_i = \sum x_i e^{\mu}\alpha_i,$$

因而 $x_i(e^{\mu'} - e^{\mu_i}) = 0$, 即 $e^{\mu'} \neq e^{\mu_i}$, 则 $x_i \neq 0$. 换言之, $x_i \neq 0$, 则 $e^{\mu'} = e^{\mu_i}$. 故 $\mu' = \mu_i$. 故

$$A\alpha' = \sum x_i A\alpha_i = \sum x_i\mu_i\alpha_i = \mu_0'\alpha',$$

即 A' 的任一特征向量也是 A 的属于同一特征值的特征向量. 因而 $A' = A$, 即 exp 是一一的.

显然 exp 是连续映射. 现证明逆映射也连续. 注意到 $\exp: gl(n, \mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C})$ 是局部同胚的, 故由 exp 在 $p(n)$ 上是一一的. 故其逆在 $P(n)$ 上连续. 故 exp 是 $p(n)$ 到 $P(n)$ 上的同胚映射.

由以上两点我们可以得到下面的结论.

引理 2' 设 G 是 $GL(n, \mathbf{C})$ 的一个伪代数群, 且满足 $g \in G$, 则 ${}^t\bar{g} \in G$. 则存在一个整数 $d \geq 0$, 使得 $G \sim (G \cap U(n)) \times \mathbf{R}^d$.

证 首先我们证明, 如果 $H \in p(n)$, 且

$$\exp H \in G \cap P(n).$$

则

$$\exp tH \in G \cap P(n), \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

事实上, 设 G 的定义多项式集为

$$F_\alpha(\cdots, x'_{ij}, \cdots, x''_{ij}, \cdots) = 0.$$

$(x'_{ij} + \sqrt{-1}x''_{ij}) \in G$. 在 F_α 中令 $x'_{ii} = x_i$, $x''_{ii} = 0$, $x'_{ij} = x''_{ij} = 0$, $i \neq j$. 则得一新方程组

$$F'_\alpha(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

若 $A = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n) \in p(n)$, $\exp A \in G$, 则有

$$F'_\alpha(e^{\mu_1}, \cdots, e^{\mu_n}) = 0,$$
$$F'_\alpha(e^{m\mu_1}, \cdots, e^{m\mu_n}) = 0 \quad m \in \mathbf{Z}.$$

由前面之结果 1 知

$$F'_\alpha(e^{t\mu_1}, \ldots, e^{t\mu_n}) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

即 $\exp tA \in G \cap P(n)$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

若 $H \in p(n)$, 则有 $U \in u(n)$, 使得

$$UHU^{-1} = A = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n).$$

于是有

$$\exp(UHU^{-1}) \in UGU^{-1}, \quad \exp t(UHU^{-1}) \in UGU^{-1},$$

$\forall t \in \mathbf{R}$. 故 $\exp tH \in G$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

对 $g \in GL(n, \mathbf{C})$, ${}^t\bar{g}g \in P(n)$, 所以 ${}^t\bar{g}g = \exp H$, $H \in p(n)$. 令 $P = \exp \frac{1}{2}H$. 于是有 $P \in P(n)$, 且

$${}^t\overline{gP^{-1}}gP^{-1} = I_n.$$

故 $gP^{-1} = U \in u(n)$. $g = UP$.

若 $g \in G$, ${}^t\bar{g} \in G$, 于是 $P^2 = \exp H \in G \cap P(n)$. 因而 $P \in G \cap P(n)$. 故 $U \in G \cap U(n)$. 因而映射

$$g \longrightarrow (U, P)$$

是 G 到 $(G \cap U(n)) \times (G \cap P(n))$ 上的一一映射. 由于 G 的拓扑是 $GL(n, \mathbf{C})$ 的诱导拓扑. 故这是同胚.

设 $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数. $GL(n, \mathbf{C})$ 的李代数有分解

$$gl(n, \mathbf{C}) = u(n) + p(n).$$

$X \to -{}^t\bar{X}$ 是 $gl(n, \mathbf{C})$ 的对合自同构, $\mathfrak{g}$ 在此对合自同构下不变, 因而

$$\mathfrak{g} = u(n) \cap \mathfrak{g} + p(n) \cap \mathfrak{g}.$$

又 $\exp : p(n) \cap \mathfrak{g} \to P(n) \cap G$ 是到上的一一映射, 故为同胚映射. 而 $p(n) \cap \mathfrak{g} \sim \mathbf{R}^d$.

故引理成立. □

定理 3 (1) 连通的典型李群有

$SU(p,\ q)$, $SU^*(2n)$, $SO^*(2n)$, $SP(n,\ \mathbf{R})$ 及 $SP(p,\ q)$.

(2) 典型李群 $SO(p,\ q)$ $(0 < p < p+q)$ 有两个连通分支.

证 所有这些群都是伪代数群, 而且满足 $g \in G$, 则 ${}^t\bar{g} \in G$. 显然

$$SU(p,\ q) \cap U(p+q) \sim SU(p) \times T \times SU(q) \text{ 连通;}$$
$$SU^*(2n) \cap U(2n) = SP(n) \text{ 连通;}$$
$$SO^*(2n) \cap U(2n) \approx U(n) \text{ 连通;}$$
$$SP(n,\ \mathbf{R}) \cap U(2n) \approx U(n) \text{ 连通;}$$
$$SP(p,\ q) \cap U(2p+2q) \approx SP(p) \times SP(q) \text{ 连通.}$$

再由引理 2, 知 (1) 成立.

又

$$\begin{aligned} SO(p,\ q) \cap U(p+q) &= SO(p,\ q) \cap SO(p+q) \\ &= \{\mathrm{diag}(A,\ B) | A \in O(p),\ B \in O(q),\ \det A \det B = 1\} \end{aligned}$$

有两个连通分支. 故 $SO(p,\ q)$ 有两个连通分支. □

我们知道 $sl(n+1,\ \mathbf{C})$ 即为 A_n, 紧致实形式为 $su(n+1,\ \mathbf{C})$. $so(2n+1,\ \mathbf{C})$ 即为 B_n, 紧致实形式为 $so(2n+1)$. $so(2n,\ \mathbf{C})$ 即为 D_n, 紧致实形式为 $so(2n)$. $sp(n,\ \mathbf{C})$ 即为 C_n, 紧致实形式为 $sp(n)$. 现在分别考虑它们的对合自同构.

AI 型. $\mathfrak{g}_u = su(n)$, $\theta(X) = \bar{X}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_0 &= \{X \in su(n) | \bar{X} = X\} \\ &= \{X \in so(n)\} = so(n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\mathfrak{p}_0 &= \{X \in su(n) | \bar{X} = -X\} \\ &= \{X \in sl(n, \mathbf{C}) | {}^t\bar{X} + X = 0, \ \bar{X} = -X\} \\ &= \{X \in sl(n, \mathbf{C}) | {}^tX = X, \ \bar{X} = -X\}.\end{aligned}$$

故

$$\mathfrak{p}_0 = \{X \in sl(n, \mathbf{R}) | {}^tX = X\}.$$

因而有

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = sl(n, \mathbf{R}).$$

因而当 $n = 2m$ 时,

$$\mathfrak{g} = A_{2m-1}, \ \mathfrak{k}_0 = so(2m) = D_m;$$

当 $n = 2m + 1$ 时,

$$\mathfrak{g} = A_{2m}, \ \mathfrak{k}_0 = so(2m+1) = B_m.$$

它们分别为 A_{2m-1}, $\sigma = \sigma_0 \exp \mathrm{ad} H$, $i_0 = m$; A_{2m}, $\sigma = \sigma_0$.

AII 型. $\mathfrak{g}_u = su(2n)$, $\theta(X) = J_n \bar{X} J_n^{-1}$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}_0 &= \{X \in su(2n) | J_n \bar{X} = X J_n\} \\ &= su(2n) \cap su^*(2n) = sp(n) \subset su^*(2n).\end{aligned}$$

$$\sqrt{-1}\mathfrak{p}_0 = \{X \in su(2n) | J_n \bar{X} = -X J_n\}.$$

$$\mathfrak{p}_0 = \{\sqrt{-1}X \in su^*(2n) | X \in su(2n)\}.$$

因而有

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = su^*(2n).$$

此为 A_{2m-1}, $\sigma = \sigma_0$.

$AIII$ 型. $\mathfrak{g}_u = su(p+q)$, $\theta(X) = I_{pq} X I_{pq}$.

$$\mathfrak{k}_0 = \{\mathrm{diag}(A,\ B) | A \in u(p),\ B \in u(q),\ \mathrm{tr}(A+B) = 0\}.$$

$$\sqrt{-1}\mathfrak{p}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Z \\ -{}^t\bar{Z} & 0 \end{pmatrix} \mid Z:\ p \times q \text{ 复矩阵} \right\}.$$

$$\mathfrak{p}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}Z \\ -{}^t\overline{\sqrt{-1}Z} & 0 \end{pmatrix} \mid Z:\ p \times q \text{ 复矩阵} \right\} \subset su(p,\ q).$$

所以

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = su(p,\ q).$$

注意到

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{p}(\mathrm{tr}A)I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{p}(\mathrm{tr}A)I_p & 0 \\ 0 & \frac{1}{q}(\mathrm{tr}A)I_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B - \frac{1}{q}(\mathrm{tr}A)I_q \end{pmatrix},$$

因而

$$\mathfrak{k}_0 \cong su(p) \times \mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{su}(\mathfrak{q}).$$

$\mathfrak{c}_0$ 是 $\mathfrak{k}_0$ 的中心.

此为 A_{p+q-1}, $\sigma = e^{\mathrm{ad}H}$, i_0 为 p 或 q.

BDI 型. $\mathfrak{g}_u = so(p+q)$, $\theta(X) = I_{pq} X I_{pq}$, $(p \geq q)$.

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in so(p),\ B \in so(q) \right\} \cong so(p) \times so(q).$$

$$\mathfrak{p}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ -{}^tX & 0 \end{pmatrix} \mid X \text{ 为实 } p \times q \text{ 矩阵} \right\}.$$

因此

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_0 &= \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} A & \sqrt{-1}X \\ -\sqrt{-1}\,{}^tX & B \end{pmatrix} \mid A \in so(p),\ B \in so(q), \right. \\
&\qquad \left. X \text{ 为实 } p \times q \text{ 矩阵} \right\}.
\end{aligned}
$$

作 $\mathfrak{g}_0$ 到 $so(p,\ q)$ 上的映射

$$
\begin{pmatrix} A & \sqrt{-1}X \\ -\sqrt{-1}\,{}^tX & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & X \\ {}^tX & B \end{pmatrix}.
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\sqrt{-1}I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \sqrt{-1}X \\ -\sqrt{-1}\,{}^tX & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A & X \\ {}^tX & B \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

所以 $\mathfrak{g}_0 \cong so(p,\ q)$.

下面分情况讨论.

$p + q \equiv 1 (\mathrm{mod} 2)$, 即为 B_l, $l = \frac{1}{2}(p + q - 1)$.

$p \equiv 1,\ q \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)$, $\mathfrak{k}_0 \cong D_i \times B_{l-i}$,

$$
\sigma = e^{\mathrm{ad} H},\quad i_0 = \frac{1}{2}(p - 1).
$$

$p = 2,\ q \equiv 1 (\mathrm{mod} 2)$, $so(2)$ 可换. 故

$$
\mathfrak{k}_0 \cong T \times B_{l-1},\ \sigma = e^{\mathrm{ad} H},\quad i_0 = 1.
$$

$p + q \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)$, 即为 D_l, $l = \frac{1}{2}(p + q)$.

$p = 1$, $\mathfrak{k}_0 \cong B_{l-1}$, $\sigma = \sigma_0$.

$p \equiv q \equiv 1(\mathrm{mod}2)\ (\geq 3)$, $\mathfrak{k}_0 \cong B_i \times B_{l-i-1}$, $i = \frac{1}{2}(p-1)$.

$$\sigma = \sigma_0 e^{\mathrm{ad}H},\ \ i_0 = i = \frac{1}{2}(p-1).$$

$p = 2,\ q \equiv 0(\mathrm{mod}2)$.

$$\mathfrak{k}_0 \cong T \times D_{l-1},\ \sigma = e^{\mathrm{ad}H},\ \ i_0 = 1.$$

$p \equiv q \equiv 0(\mathrm{mod}2)\ (> 2)$.

$$\mathfrak{k}_0 \cong D_i \times D_{l-i},\ i = \frac{p}{2},\ \sigma = e^{\mathrm{ad}H},\ \ i_0 = \frac{p}{2}.$$

$DIII$ 型. $\mathfrak{g}_u = so(2n)$, $\theta(X) = J_n X J_n^{-1}$.

$$\mathfrak{k}_0 = so(2n) \cap sp(n) \approx u(n) \cong T \times A_{n-1}.$$

$$\sqrt{-1}\mathfrak{p}_0 = \{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & -X_1 \end{pmatrix} | X_1,\ X_2 \in so(n)\}.$$

因此

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = so^*(2n)$$

为 D_n, $\sigma = e^{\mathrm{ad}H}$. $\alpha_{i_0} = \alpha_n$ 或 α_{n-1}.

CI 型. $\mathfrak{g}_u = sp(n)$, $\theta(X) = \bar{X}$. 注意到,

$$X \in sp(n) \Leftrightarrow {}^t\bar{X} + X = 0,\ {}^t X J_n + J_n X = 0.$$

因而有

$$\bar{X} = -{}^t X = -({}^t X J_n) J_n^{-1} = -(-J_n X) J_n^{-1} = J_n X J_n^{-1}.$$

$$\mathfrak{k}_0 = sp(n) \cap so(2n) \approx u(n) \cong T \times A_{n-1}.$$

$$\sqrt{-1}\mathfrak{p}_0 = \{X \in sp(n) | \bar{X} = -X\}.$$

$$\mathfrak{p}_0 = \{X \in sp(n, \mathbf{R}) \cap \sqrt{-1}sp(n)\}.$$

因而

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = sp(n, \mathbf{R})$$

为 C_n, $\sigma = e^{\mathrm{ad}H}$, $i_0 = n$.

CII 型. $\mathfrak{g}_u = sp(p+q)$, $\theta(X) = K_{pq}XK_{pq}$.

$X \in \mathfrak{k}_0$, 即

$$K_{pq}X - XK_{pq} = 0, \ {}^t\bar{X} = -X.$$

即有

$${}^t\bar{X}K_{pq} + K_{pq}X = 0, \ X \in sp(p, q).$$

$$\mathfrak{k}_0 = sp(p, q) \cap u(2p+2q) \approx sp(p) \times sp(q).$$

$$\sqrt{-1}\mathfrak{p}_0 = \{X \in sp(p+q) | K_{pq}XK_{pq} = -X\}.$$

因而有

$${}^t\bar{X}K_{pq} - K_{pq}X = 0.$$

于是有

$${}^t\overline{\sqrt{-1}X}K_{pq} + K_{pq}(\sqrt{-1}X) = 0.$$

因而

$$\mathfrak{p}_0 \subseteq sp(p, q).$$

于是

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = sp(p, q)$$

为 C_{p+q}, $\sigma = e^{\mathrm{ad}H}$. $i_0 = p$.

这样我们把典型第一类实单李代数 (李群) 均用线性群实现了.

5.2 实半单李代数的自同构群

设 $\mathfrak{g}_0$ 为实半单李代数. $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 为其自同构群. $\mathrm{Int}\mathfrak{g}_0$ 为单位连通分支，由 $e^{\mathrm{ad}\mathfrak{g}_0}$ 生成，记为 $\mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$.

引理 1 实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0,$$

则在 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 的每个连通分支中可取代表元 σ, 使得

$$\sigma(\mathfrak{k}_0) = \mathfrak{k}_0,\ \ \sigma(\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{p}_0.$$

证 设 $\tau \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$, 于是 $\mathfrak{g}_0$ 有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}_0 = \tau(\mathfrak{k}_0) + \tau(\mathfrak{p}_0).$$

由 Cartan 分解在 $\mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$ 下共轭，于是有 $\sigma_0 \in \mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$, 使得

$$\sigma_0\tau(\mathfrak{k}_0) = \mathfrak{k}_0,\ \ \sigma_0\tau(\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{p}_0.$$

令 $\sigma = \sigma_0\tau$, 则有 $\tau = \sigma_0^{-1}\sigma$. τ, σ 在 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 的同一连通分支中. 故引理成立. □

定义 1 设实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0.$$

对此 Cartan 分解，$\mathfrak{h}_0$ 为有标准分解的最大紧 Cartan 子代数，即

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_T + \mathfrak{h}_V,$$

$\mathfrak{h}_T$ 为 $\mathfrak{k}_0$ 的 Cartan 子代数. 若 $\sigma_0 \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$, 满足

(1) $\sigma_0(\mathfrak{k}_0)=\mathfrak{k}_0$, $\sigma_0(\mathfrak{p}_0)=\mathfrak{p}_0$, $\sigma_0(\mathfrak{h}_T)=\mathfrak{h}_T$, $\sigma_0(\mathfrak{h}_V)=\mathfrak{h}_V$;

(2) 若 Π_0 为 $\mathfrak{k}_0^{\mathbf{C}}$ 关于 $\mathfrak{h}_T^{\mathbf{C}}$ 的一个素根系，有

$$\sigma_0(\Pi_0)=\Pi_0.$$

则称 σ_0 为 $\mathfrak{g}_0$ 的 **正则自同构**.

自然，正则自同构与 Cartan 分解， $\mathfrak{h}_0$ 的选取及 Π_0 的选取有关. 对正则自同构有下面的结论.

定理 1 设 $\mathfrak{g}_0$ 为实半单李代数，取定 Cartan 分解,

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0,$$

标准分解的最大紧 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_T+\mathfrak{h}_V,$$

及 $\mathfrak{k}_0^{\mathbf{C}}$ 对 $\mathfrak{h}_T^{\mathbf{C}}$ 的素根系后. $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 的任一连通分支中有正则自同构.

证 任取 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 中一个连通分支，则有元素 σ_1, 使得

$$\sigma_1(\mathfrak{k}_0)=\mathfrak{k}_0,\ \ \sigma_1(\mathfrak{p}_0)=\mathfrak{p}_0.$$

因而

$$\sigma_1(\mathfrak{h}_0)=\sigma_1(\mathfrak{h}_T)+\sigma_1(\mathfrak{h}_V)$$

仍为最大紧 Cartan 子代数, 对 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ 有标准分解. 而 $\mathfrak{h}_0$ 与 $\sigma_1(\mathfrak{h}_0)$ 在 $K_0=e^{\mathrm{ad}\mathfrak{k}_0}$ 下共轭. 故存在 $k_1\in K_0$, 使得 $k_1\sigma_1(\mathfrak{h}_T)=\mathfrak{h}_T$, $k_1\sigma_1(\mathfrak{h}_V)=\mathfrak{h}_V$. 同时有 $k_1\sigma_1(\mathfrak{k}_0)=\mathfrak{k}_0$, $k_1\sigma_1(\mathfrak{p}_0)=\mathfrak{p}_0$. 令 $\sigma_2=k_1\sigma_1$. 显然，有 Π_0, $\sigma_2(\Pi_0)$ 为 $\mathfrak{k}_0^{\mathbf{C}}$ 关于 $\mathfrak{h}_T^{\mathbf{C}}$ 的两个素根

系. 于是有 $k_2 \in W_{\mathfrak{k}_0} = N_{\mathfrak{k}_0}(e^{\mathrm{ad}\mathfrak{h}_T})$, 使得 $k_2\sigma_2(\Pi_0) = \Pi_0$. 于是 $\sigma_0 = k_2\sigma_2$, 满足

$$\begin{aligned} &\sigma_0(\mathfrak{k}_0) = \mathfrak{k}_0, \quad \sigma_0(\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{p}_0, \\ &\sigma_0(\mathfrak{h}_T) = \mathfrak{h}_T, \quad \sigma_0(\mathfrak{h}_V) = \mathfrak{h}_V, \\ &\sigma_0(\Pi_0) = \Pi_0. \end{aligned}$$

即 σ_0 为正则自同构, 在所取的连通分支中. □

下面我们讨论正则自同构的性质. 设实单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0,$$

$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_T + \mathfrak{h}_V$ 为最大紧 Cartan 子代数. 记 $\mathfrak{k}_0^C$ 关于 $\mathfrak{h}_T$ 之根系为 Σ_0, 素根系为 $\Pi_0 = \{\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n'\}$.

$\mathfrak{k}_0$ 有不可约实表示 $(\mathrm{ad}\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$. 若复化不可约, 则有最高权 λ_0'; 若复化可约, 则有最高权 λ_1', λ_2'.

引理 2 符号如上, 以 $B_0(X, Y)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{k}_0$ 记 $\mathfrak{k}_0$ 的 Killing 型. σ_0 为正则自同构. 则有

(1) $B_0(\alpha_i', \alpha_j') = B_0(\sigma_0(\alpha_i'), \sigma_0(\alpha_j'))$, $1 \le i, j \le s$;

(2) $B_0(\lambda_i', \lambda_j') = B_0(\sigma_0(\lambda_i'), \sigma_0(\lambda_j'))$, $i = 0, 1, 2$, $1 \le j \le s$;

(3) 当 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{p}_0)$ 为第一类不可约实表示时, $\sigma_0(\lambda_0') = \lambda_0'$; 否则有

$$\sigma_0(\lambda_i') = \lambda_i',\ i = 1, 2 \ \text{或}\ \sigma_0(\lambda_1') = \lambda_2',\ \sigma_0(\lambda_2') = \lambda_1'.$$

证 因为 $\sigma_0|_{\mathfrak{k}_0} \in \mathrm{Aut}\mathfrak{k}_0$, 且 $\sigma_0(\mathfrak{h}_T) = \mathfrak{h}_T$. 因而 (1), (2) 成立. 又 $\sigma_0(\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{p}_0$. 于是

$$k \longrightarrow \mathrm{ad}\sigma_0(k) = \sigma_0 \mathrm{ad}k\sigma_0^{-1}, \quad \forall k \in \mathfrak{k}_0$$

限制在 $\mathfrak{p}_0$ 上亦为 $\mathfrak{k}_0$ 的表示 $(\mathrm{ad}\sigma_0,\ \mathfrak{p}_0)$ 且与 $(\mathrm{ad},\ \mathfrak{p}_0)$ 等价. 又 $\sigma_0(\mathfrak{h}_T)=\mathfrak{h}_T$, $\sigma_0(\Pi_0)=\Pi_0$, 故 $(\mathrm{ad},\ \mathfrak{p}_0)$ 与 $(\mathrm{ad}\sigma_0,\ \mathfrak{p}_0)$ 有相同的权系与最高权. 而 $(\mathrm{ad}\sigma_0,\ \mathfrak{p}_0)$ 的最高权为 $\sigma_0(\lambda_i')$, $i=0,\ 1,\ 2$. 于是有 $\sigma_0(\lambda_0')=\lambda_0'$, $\sigma_0(\lambda_i')=\lambda_i'$. 或 $\sigma_0(\lambda_1')=\lambda_2'$, $\sigma_0(\lambda_2')=\lambda_1'$. 引理证完. □

上面引理的逆命题也成立, 即有下面的定理.

定理 2 符号如上, Π_0 的置换 σ_0 如果满足引理 2 的 (1) — (3) 中所述条件, 则 σ_0 可唯一地扩充为 $\mathfrak{g}_0$ 的正则自同构.

证 因 σ_0 为 Π_0 的置换, 且保持内积. 故 σ_0 可扩充为 $\mathfrak{k}_0$ 的正则自同构. 因而可扩充为 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ 的自同构, 且有

$$\sigma_0(\mathfrak{k}_0)=\mathfrak{k}_0,\ \sigma_0(\mathfrak{p}_0)=\mathfrak{p}_0.$$

由 $\sigma_0(\mathfrak{h}_T)=\mathfrak{h}_T$ (因 $\sigma_0(\Pi_0)=\Pi_0$), 而包含 $\mathfrak{h}_T$ 的 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数是唯一的. 故有 $\sigma_0(\mathfrak{h}_0)=\mathfrak{h}_0$. 自然 $\sigma_0(\mathfrak{h}_V)=\mathfrak{h}_V$. 即 σ_0 为 $\mathfrak{g}_0$ 的正则自同构. 由上面引理知 $\sigma_0(\lambda_i')=\lambda_i'$, 或 $\sigma_0(\lambda_1')=\lambda_2'$, $\sigma_0(\lambda_2')=\lambda_1'$. 这就决定了 σ_0. □

由这个定理知为决定第一类实单李代数的正则自同构, 我们可以考虑 $\Pi_0\cup\{\lambda_i'\}$ 上满足引理 2 中 (1) — (3) 的置换. 由直接计算及角图, 我们立即得下面的定理.

定理 3 第一类实单李代数的正则自同构分类如下.

($\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0/\mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$ 的阶记为 N)

甲. 由 $\sigma=e^{\mathrm{ad}H}$ 给出的分类.

1. $AIII_1$: $i_0\neq\frac{1}{2}(l+1)$, $N=2$. 元素: I 和

$$\sigma_1=((1,\ i_0-1)(2,\ i_0-2)\cdots)((i_0+1,\ l)(i_0+2,\ l-1)\cdots).$$

2. $AIII_2$: $i_0=\frac{1}{2}(l+1)$, $N=4$. 元素: I,σ_1 如上,

$$\sigma_2=((1,\ l)(2,\ l-1)\cdots(\frac{l-1}{2},\ \frac{l+3}{2}),$$

及 $\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$.

3. B_l: i_0, $N=2$. 元素:

$$I,\ (1,\ 0).\ 以\ \alpha_0\ 记\ -\varphi.$$

4. CI: $i_0=l$, $N=2$. 元素:

$$I,\ (0,\ l)(1,\ l-1)(2,\ l-2)\cdots.$$

5. CII: $i_0\neq\frac{l}{2}$, $N=1$. 元素: I.
$i_0=\frac{l}{2}$, $N=2$. 元素:

$$I,\ (0,\ l)(1,\ l-1)(2,\ l-2)\cdots.$$

6. D_l: $i_0\neq\frac{l}{2}$, 或 $l-1$, $N=4$. 元素:

$$I,\ \sigma_1=(1,\ 0),\ \sigma_2=(l,\ l-1),\ \sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1.$$

$i_0=l,\ l-1,\ N=2$. 元素:

$$I,\ (0,\ l)(1,\ l-1)(2,\ l-2)\cdots.$$

$i_0=\frac{l}{2}.\ l\neq 4$, $N=8$. 元素: $I,\sigma_1=(1,\ 0),\sigma_2=(l,\ l-1)$, 以及

$$\sigma_3=(0,\ l)(1,\ l-1)(2,\ l-2)\cdots,$$

$$\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_3=\sigma_3\sigma_1,\ \sigma_2\sigma_3=\sigma_3\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

7. D_4: $i_0=2$, $N=4!$. 群为对称群 S_4.
8. G_2: $N=1$. I.
9. F_4: $N=1$. I.
10. E_6: $i_0=1$, $N=2$. I, $(1,\ 0)(2,\ 6)$.

$i_0 = 6,\ N = 2.\ I,\ (1,\ 5)(2,\ 4)$.

11. E_7: $i_0 = 1,\ N = 2.\ I,\ (2,\ 6)(3,\ 5)(0,\ 1)$.

$i_0 = 7,\ N = 2.\ I,\ (0,\ 1)(2,\ 6)(3,\ 5)$.

12. E_8: $N = 1.\ I$.

乙. 由 $\sigma = \sigma_0 e^{\mathrm{ad}H}$ $(\sigma_0 \neq I)$ 给出的分类.

只要下面两种情况 $N \neq 1$.

1. A_l, l 奇数. $i_0 = \frac{1}{2}(l+1)$. $N = 2$.

$$I,\ (1',\ 0').\ 0' \text{ 表示 } -\varphi_0'.$$

2. D_l, l 奇数. $i_0 = \frac{1}{2}(l-1)$. $N = 2$.

$$I,\ (0',\ (l-1)')(1,\ l-2)\cdots(\frac{1}{2}(l-1),\ \frac{1}{2}(l+1)).$$

5.3 Weyl 群

我们在 2.4 中已经定义了一个实半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群 $W(\mathfrak{g})$. 为研究 $W(\mathfrak{g})$, 先讨论 $\mathfrak{g}$ 是紧半单的情况. $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^C$ 看作实李代也是半单的, 记为 $\mathfrak{g}^R$. 它的 Cartan 分解为

$$\mathfrak{g}^R = \mathfrak{g} + J\mathfrak{g},$$

其中 J 由 $J(x) = \sqrt{-1}x$ 所定的复结构. 令 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数, 则 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + J\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}^R$ 的一个 T- 正常 Cartan 子代数. 并且 $J\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}^R$ 的一个约化 Cartan 子代数.

首先, $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}^R}\mathfrak{g}$ 的元素作用于 $\mathfrak{g}^R$ 是与 J 可换的, 所以如果将它作用于 $\mathfrak{g}^C$, 则是 $\mathfrak{g}^C$ 的自同构, 而且属于 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}^C}\mathfrak{g}$. 反之, 任一个 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}^C}\mathfrak{g}$ 的元素 ρ 视作 $\mathfrak{g}^R$ 的对应显然是 $\mathfrak{g}^R$ 的一个自同构. 这就得到 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}^R}\mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}^C}\mathfrak{g}$ 同构.

将 $\mathfrak{g}^R$ 的约化 Weyl 群记为 $W^-(\mathfrak{g}^R)$. 我们来讨论 $W^-(\mathfrak{g}^R)$ 与 $W(\mathfrak{g})$ 的关系. 如在 4.1 中, 令 M' 是 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}^R}\mathfrak{g}$ 中令 $J\mathfrak{h}_0$ 不变的子群, M 是 M' 中在 $J\mathfrak{h}_0$ 上为恒等变换的子群, 则 $W^-(\mathfrak{g}^R)=M'/M$. 利用上面 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}^R}\mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}^C}\mathfrak{g}$ 的同构, 我们将 $\mathfrak{g}^R$ 与 $\mathfrak{g}^C$ 等同起来. M' 作为 $\mathfrak{g}^C$ 上的变换因和 J 可换, 所以令 $\mathfrak{h}_0$ 不变. 而 M 内的元素在 $\mathfrak{h}_0$ 上是恒等变换. 这就可以看出 $M'\approx K_0(\mathfrak{h}_0)$. 后者在 $\mathfrak{h}$ 的幂等 $\mathfrak{h}_R$ 上的诱导就是 $W(\mathfrak{g})$. 于是

$$W^-(\mathfrak{g}^R)\approx W(\mathfrak{g}).$$

已知如果以 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0+\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 为 $\mathfrak{g}^C$ 的 Cartan 子代数, 则它的根系 Δ 作为 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 的向量即为 $\mathfrak{g}^R$ 的约化根系 (这里自然将 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 与 $J\mathfrak{h}_0$ 恒等起来). 因而关于 $\mathfrak{g}^R$ 的约化 Weyl 群与紧李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群, 复李代数 $\mathfrak{g}^C$ 的 Weyl 群是一致的.

对于任意一个紧李代数 $\mathfrak{g}$ 也可以定义它的 Weyl 群, 因为

$$\mathfrak{g}=C(\mathfrak{g})\dot{+}\mathfrak{g}_1.$$

$\mathfrak{g}_1$ 是半单的. 若 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数, 则 $C(\mathfrak{g})+\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 令

$$W(\mathfrak{g})=W(\mathfrak{g}_1).$$

也就是说, $W(\mathfrak{g})$ 是 $C(\mathfrak{g})+\mathfrak{h}_0$ 的变换群, 并且在 $C(\mathfrak{g})$ 上为恒等变换, 而在 $\mathfrak{h}_0$ 上为 $\mathfrak{g}_1$ 的 Weyl 群.

利用这个定义, 我们进而讨论一般的非紧半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群.

命题 1 设

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解，则

$$W(\mathfrak{g}) = W(\mathfrak{k}).$$

证 令 $W_0(\mathfrak{g})$ 是 $W(\mathfrak{g})$ 内的元素在 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 上的诱导所成的 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 的变换群. 这样我们得到了从 $W_0(\mathfrak{g})$ 到 $W(\mathfrak{g})$ 的同态映射 ρ. 于是

$$\ker\rho = \{s \in W(\mathfrak{g}) | s(H) = H, \ \forall H \in \mathfrak{h}_0\}.$$

仍以 Π 表示素根系. 对于 $\alpha \in \Pi$, $s \in \ker\rho$, 有

$$(s(\alpha))' = s(\alpha') = \alpha'.$$

所以

$$s(\alpha) = \alpha \quad 或者 \quad s(\alpha) = \theta(\alpha).$$

总之,

$$s(\Pi) = \Pi.$$

另一方面，$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{h}_1$ 是紧半单李代数 $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ 的 Cartan 子代数，$\mathfrak{h}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}^C = \mathfrak{u}^C$ 的幂等. 从定义知 s 令 $\mathfrak{h}_R$ 不变，而且属于 $\mathfrak{u}$ 的 Weyl 群 $W(\mathfrak{u})$. 于是 $s = I$. 所以

$$W_0(\mathfrak{g}) \approx W(\mathfrak{g}).$$

从定义知 $W(\mathfrak{k})$ 是 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{k}$ 中令 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 不变的元素在 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 内的诱导所成的 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 的变换群. 而 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{k}$ 的元素可以扩充为 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 的元素. 所以 $W((\mathfrak{k}) \subseteq W_0(\mathfrak{g})$. 另一方面，$W_0(\mathfrak{g})$ 为 K_0 中令 $\mathfrak{h}$ 不变的元素在 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 上的诱导. 而 $K_0 = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$, 同时 $\mathfrak{h}_0 \subseteq \mathfrak{k}$, 所以 $W_0(\mathfrak{g})$ 的元素可以用 $\mathfrak{k}$ 的内自同构得到，即 $W_0(\mathfrak{g}) \subseteq W(\mathfrak{k})$. 所以 $W_0(\mathfrak{g}) = W(\mathfrak{k})$. 于是命题成立. □

系 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 内 $\mathfrak{k}$ 的 Weyl 房在 $W(\mathfrak{g})$ 下是单可递的.

证 利用 $W(\mathfrak{g})$ 和 $W(\mathfrak{k})$ 的关系, 以及紧李代数的 Wely 群的性质即可得到. □

从上面命题的证明还可得到下面结果.

命题 2 $W(\mathfrak{g})$ 同构于 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 内由 $\mathfrak{k}$ 的素根系 $\Pi(\mathfrak{k})$ 所定的反射产生的有限群.

由于单李代数的特征子代数的素根系已有明确的表示, 所以 $W(\mathfrak{g})$ 也可以明确表示出来. 我们明确表示的是 $W_0(\mathfrak{g})$. 要明确 $W(\mathfrak{g})$ 和 $W_0(\mathfrak{g})$ 的关系可参阅 Murakami 或江家福的论文或正规子代数的论文.

下面讨论 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\mathfrak{g}$ 的结构.

命题 3 设 $\tilde{W}(\mathfrak{g}), W(\mathfrak{g})$ 分别是实半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 群和 Weyl 群, 则

$$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\mathfrak{g} \approx \tilde{W}(\mathfrak{g})/W(\mathfrak{g}).$$

证 根据 2.4 的命题 2 有

$$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\mathfrak{g} \approx K(\mathfrak{h})/K_0(\mathfrak{h}).$$

再由 2.5 的引理 2 知 R_0 是 $K(\mathfrak{h}), K_0(\mathfrak{h})$ 的正规子群. 由此易得

$$\tilde{W}(\mathfrak{g}) \approx K(\mathfrak{h})/R_0, \quad W(\mathfrak{g}) \approx K_0(\mathfrak{h})/R_0.$$

于是命题成立. □

利用上面关于 Weyl 群的讨论, 可以将上面的同构关系进一步明确.

令 Ω_0 是 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 的一个固定的 $\mathfrak{k}$ Weyl 房. 令 $\tilde{T}$ 是 $\tilde{W}(\mathfrak{g})$ 中令 Ω_0 不变的元素集合生成的子群. $t \in \tilde{W}(\mathfrak{g})$, 则 $t(\Omega_0)$ 也是 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 的一个 $\mathfrak{k}$ Weyl 房. 因此由上面的系, 有 $s \in W(\mathfrak{g})$ 使

得 $s\cdot t(\Omega_0)=\Omega_0$. 所以 $s\cdot t=t_1\in\tilde{\mathcal{T}}$. 因此 $\tilde{\mathcal{T}}$ 到 $\tilde{W}(\mathfrak{g})/W(\mathfrak{g})$ 的映射 $t_1\to t_1W(\mathfrak{g})$ 是一个同态，由此映射是满的，故此映射是同构. 即

$$\tilde{W}(\mathfrak{g})/W(\mathfrak{g})\approx\tilde{\mathcal{T}}/(\tilde{\mathcal{T}}\cap W(\mathfrak{g}))$$

由系中所说单可递性知 $\tilde{\mathcal{T}}\cap W(\mathfrak{g})=\{I\}$. 所以得到

$$\tilde{W}(\mathfrak{g})/W(\mathfrak{g})\approx\tilde{\mathcal{T}}$$

命题 4 令 $\mathcal{T}'$ 是 $\tilde{\mathcal{T}}$ 在 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 上的诱导变换群. π 是 $\tilde{\mathcal{T}}$ 到 $\mathcal{T}'$ 的自然同态. 则

$$\ker\pi=\{I,\ \theta\}.$$

证 设 $s\in\ker\pi$, 则 s 在 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 上为恒等变换. 若 $s\in W(\mathfrak{g})$, 则必为恒等变换. 若 $s\notin W(\mathfrak{g})$, 则是一个外自同构，它令 $\mathfrak{g}^C$ 的素根系 Π 不变，即 $s(\Pi)=\Pi$. 如果 $\mathfrak{g}^C$ 不为 D_4, 则 $s=\theta$ 是显然的. 如果 $\mathfrak{g}^C=D_4$, 由于 s 与 θ 交换，故 s 只能是 θ. 总之 $s=\theta$. □

实际上，$\mathcal{T}'$ 就是令李代数的图不变的群，也称为**图自同构群**. 上节我们已经给出了第一类实单李代数的图自同构群.

5.4 拟内自同构

我们知道实李代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 是实向量空间上的代数群. 令 $\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的所有线性变换所成的实向量空间. $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 是代数群，亦即它作为 $\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ 的子集是一个代数流形. 为了了解本节的内容，我们先简略地介绍一下代数流形及代数群的一些知识和需要的定理.

设 V 是域 $\mathbf{K}$ 上的向量空间，$\mathbf{K}$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$. 在 V 上引进 **Zariski 拓扑** 如下.

定义 1 V 内的子集称为 **闭集**, 如果它是一组 V 上的多项式 $\{P(x)\} = P$ 的零点集.

这样的闭集又称 Z- 闭集或 **代数集**.

例 1 设 V 是一个向量空间，$\operatorname{End} V$ 为 V 的所有线性变换所构成的向量空间. $\operatorname{End} V$ 中的代数群显然是其中的代数集.

容易知道 V 内的 Z- 闭集 B, 对于 V 作为实数域或复数域上向量空间的通常拓扑而言也是闭集.

定义 2 以 $K[V]$ 表示 V 上所有多项式所成的环. 如果 M 为 V 的子集，则称 V 上以 M 为零点的多项式所成的 $K[V]$ 的理想为 M 的 **对应理想**.

定义 3 V 中子集 M 称为在 Zariski 拓扑下是 **连通** 的，如果 M 不能分解为两个相对闭集之和.

M 连通等价于说 M 的对应理想是素 (质) 理想. 连通集又称为 **不可约**.

$\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ 作为代数群对于 Zariski 拓扑来说一般不是连通的. 对于一般的定义在 V 上的代数群 G, 可以定义它的 Z- 连通分支，称为 Z- 分支. 特别是含单位元的分支，称为单位 Z- 分支，记为 G_1. 根据定义 G_1 是连通的或不可约的. 我们有下面结论.

命题 1 设 G 是定义在向量空间 V 上的代数群，则 G 有唯一的单位 Z- 分支 G_1, G_1 是不可约的，而且是 G 的正规子群，G/G_1 是有限阶的.

如果 $\mathfrak{g}$ 是实李代数, 其复化 $\mathfrak{g}^C$ 是复向量空间. 以 $\operatorname{End}\mathfrak{g} = \mathcal{E}$, $\operatorname{End}\mathfrak{g}^C$ 分别表示 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^C$ 上所有线性变换所成的向量空间，则

$\operatorname{End}\mathfrak{g}^C$ 是 $\operatorname{End}\mathfrak{g}=\mathcal{E}$ 的复化，故可记为 $\mathcal{E}^C$.

令 G 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个代数群，其元素是 $\mathfrak{g}$ 的自同构，所以可以唯一地扩充为 $\mathfrak{g}^C$ 的自同构. 这样可以将 G 看作 $\mathcal{E}^C$ 的子集，但它不再是代数集. 它的代数闭包，即包含它的最小代数集，记为 G^C.

根据 Chevalley 的结果，有以下结论.

命题 2 令 G 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个代数群，G^C 为其在 $\mathfrak{g}^C$ 上的代数闭包.

(1) 若 $\mathfrak{A}$ 是 G 对应的理想，则 $\mathfrak{A}$ 内元素在 $\mathbf{C}$ 上的线性组合所构成的 $P[\mathcal{E}^C]$ 的理想 $\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}$, 是 G^C 对应的理想.

(2) 若 G_1 是 G 的单位 Z- 分支，则 G_1^C 是 G^C 的单位分支.

(3) 若 t_iG, $(t_i\in G,\ 1\le i\le h)$ 是 G/G_1 的不同类，则 t_iG^C 是 G^C/G_1^C 的不同类.

定义 4 设 $\mathfrak{g}$ 为实李代数. $g\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **拟内自同构**, 如果 g 作为 $\mathfrak{g}^C$ 的自同构是内自同构. $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ 的拟内自同构所构成的群称为 $\mathfrak{g}$ 的 **拟内自同构群**, $\overline{\operatorname{Ad}\mathfrak{g}}$.

命题 3 实李代数 $\mathfrak{g}$ 的拟内自同构群 $\overline{\operatorname{Ad}\mathfrak{g}}$ 是 $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ 的单位 Z- 分支.

证 设 $\mathfrak{A}$ 是 $G=\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ 的对应理想. 从上面命题 2 之 (1) 知，$\mathfrak{A}$ 的生成元为 G^C 对应理想的生成元. 这就易知 G^C 与 $\mathfrak{g}^C$ 的自同构群 $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}^C$ 是一致的，即

$$(\operatorname{Aut}\mathfrak{g})^C=\operatorname{Aut}\mathfrak{g}^C.$$

令 G_1 是 G 的单位 Z- 分支. 从命题 2 之 (2) 知它的扩充 G_1^C 是 G^C 的单位 Z- 分支. 但是，复数域上代数群的 Z- 分支与通

常拓扑连通分支是一致的. 故

$$G_1^C = \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^C.$$

这就看出 G_1 内的元素扩充为 $\mathfrak{g}^C$ 的内自同构, 即为 $\mathfrak{g}$ 的拟内自同构. 所以

$$G_1 \subseteq \overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}}.$$

假定 $t_1 G_1 \neq G_1$ 是 $\overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}}/G_1$ 的一个类. 则从命题 2 之 (3) 知, $t_1 G_1^C$ 也是 $(\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g})^C/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}^C$ 的一个不为单位的类, 故 $t_1 \notin \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^C$. 这与

$$t_1 \in \overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}} \subset \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^C$$

矛盾. 因而

$$G_1 = \overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}}. \qquad \square$$

现在利用上节的结果来看, 如何具体计算出 $\overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 的分支数.

命题 4 令 $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}} \cap W(\mathfrak{g}^C)$, 则

$$\overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g} \approx \mathcal{T}.$$

证 我们已经知道

$$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g} \approx \tilde{\mathcal{T}}.$$

所以只要证明 $\rho \in \mathcal{T}$ 当且仅当 ρ 可以扩充为 $\mathfrak{g}^C$ 的内自同构, 即 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^C$ 的元素. 我们知道若 $\rho \in \tilde{\mathcal{T}}$, 则 ρ 的扩充令 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ 不变. 将此扩充再扩充为 $\mathfrak{g}^C$ 的自同构 $\tilde{\rho}$ 时, 它在 $\mathfrak{h}_R$ 上的限制 $\rho' \in W(\mathfrak{g}^C)$. 反之, 如果 $\rho' \in \mathcal{T}$, 则从扩充定理知道 ρ' 可以扩充为 $\mathfrak{g}$ 的自同构 ρ, 又可以扩充为 $\mathfrak{g}^C$ 的自同构, 仍以 ρ 表示之. 另一方面因为 $\rho' \in W(\mathfrak{g}^C)$, 所以有一个

$\tilde{\rho} \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^C$, 它在 $\mathfrak{h}_R$ 上的限制是 ρ'. 于是 $\rho^{-1}\tilde{\rho} \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}^C$, 且在 $\mathfrak{g}^C$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}^C$ 上为恒等变换. 于是

$$\rho^{-1}\tilde{\rho} = e^{\mathrm{ad}\,H},\ H \in \mathfrak{h}^C.$$

$\rho \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}^C$, $\rho \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0$ $\rho \in \overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}_0}$. □

最后我们证明由江家福得到的拟内自同构群 $\overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}}$ 和 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的商群 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}}$ 与 Satake 图的关系.

设 $\mathfrak{h}$ 是实半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的正则 Cartan 子代数, Π_0 是 $\mathfrak{h}_R$ 对一个容许次序的素根系. 令 $K(\Pi_0)$ 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 中令 Π_0 不变的所有元素构成的子群. 令 $K_0(\Pi_0) = K(\Pi_0) \cap \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$. 若 $\rho \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, 则 $\rho(\mathfrak{h})$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的正则 Cartan 子代数, $\rho(\Pi_0)$ 也是 $\rho(\mathfrak{h})_R$ 内的一个容许次序的素根系. 由 Satake 基本定理, 知有

$$\rho_1^{-1} \in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$$

使得

$$\rho_1^{-1}\rho(\Pi_0) = \Pi_0.$$

由此可以得到

$$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g} \approx K(\Pi_0)/K_0(\Pi_0).$$

设 σ 为 $\mathfrak{g}$ 所决定的共轭, 又 $\rho \in K(\Pi_0)$, 则 $\rho(\mathfrak{h}_R) = \mathfrak{h}_R$. 又 $\rho \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, 故 $\rho\sigma = \sigma\rho$, $\rho(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 令

$$R = \{\rho \in K(\Pi_0) | \rho(H) = H,\ \forall H \in \mathfrak{h}_R\}.$$

又以 W 表示 $K(\Pi_0)$ 在 $\mathfrak{h}_R$ 上诱导所成的群. 因此

$$W \approx K(\Pi_0)/R.$$

可以证明 $R \subseteq \overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}}$, 进而 $R \subseteq K_0(\Pi_0)$. 所以有

$$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}} \approx W/W_0,\ W_0 = K_0(\Pi_0)/R.$$

但是, W_0 是 $W(\mathfrak{g}^C)$ 中使 Π_0 不变的子群, 故 $W_0 = \{I\}$.

$$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}} \approx W.$$

W 是 $\mathfrak{h}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+ + \mathfrak{h}^-$ 的等距变换, 它与 σ 交换, 而且令容许素根系 Π_0 不变. 由于 W 内的元素与 σ 可换, 所以令 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$ 令 $\mathfrak{h}^-$ 均不变.

我们知道容许素根系对于 $\mathfrak{h}^-$ 的射影称为 $\mathfrak{g}$ 的 Satake 图. 事实上, Satake 图将容许素根系 Π_0 分为三部分:

(1) $\Pi_0^0 = \{\alpha_i | \sigma(\alpha_i) = -\alpha_i,\ 1 \le i \le \lambda\}$;

(2) $\Pi_0^1 = \{\alpha_i,\ \lambda_{i'} | \sigma(\alpha_i) + \alpha_{i'} \in \Pi_0^0,\ \lambda + 1 \le i \le \lambda + s\}$;

(3) $\Pi_0^2 = \{\alpha_i | \sigma(\alpha_i) - \alpha_i \in \Pi_0^0,\ \lambda + s + 1 \le i \le \lambda + s + t\}$.

引理 1 设 $\rho \in W$, 则

$$\rho(\Pi_0^k) = \Pi_0^k,\ k = 0,\ 1,\ 2;$$

且若 $\rho(\alpha_i) = \alpha_t$, 则 $\rho(\alpha_{i'}) = \alpha_{t'}$.

证 若 $\rho \in W$, 则 $\rho\sigma = \sigma\rho$. 于是

$$\sigma(\rho(\alpha_i)) = -\rho(\alpha_i),\ \forall \alpha_i \in \Pi_0^0.$$

故 $\rho(\Pi_0^0) = \Pi_0^0$.

对 $\alpha_i \in \Pi_0^1$, 令 $\rho(\alpha_i) = \alpha_t$. 则有

$$\Pi_0^0 \ni \rho(\sigma(\alpha_i) - \alpha_{i'}) = \sigma(\alpha_t) - \rho(\alpha_{i'}).$$

因而 $\rho(\alpha_{i'}) = \alpha_{t'}$, $t' \ne t$, $\rho(\Pi_0^1) = \Pi_0^1$.

同样，$\rho(\Pi_0^2) = \Pi_0^2$. □

定义 5 $\mathfrak{h}_R$ 的等距变换称为令 $\mathfrak{g}$ 的 Satake 图不变，如果 ρ 满足：

1) ρ 令 Satake 图的子系 Π_0^k $(k = 0, 1, 2)$ 不变；

2) 若 $\rho(\alpha_i) = \alpha_t$，则 $\rho(\alpha_{i'}) = \alpha_{t'}$.

定理 1 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\overline{\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}} \approx W$ 是令 Satake 图不变的等距变换构成的群.

证 由引理 1 知 W 中元素均使 Satake 图不变. 反之，若 ρ 是一个使 Satake 图不变的等距变换. 由于 $\{\alpha_i - \sigma(\alpha_i) | 1 \le i \le l\}$ 构成 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$ 的基，于是

$$\alpha_i - \alpha_{i'} \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+ \quad \lambda + 1 \le i \le \lambda + s.$$

由此可知 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$ 有基

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda, \alpha_{\lambda+1} - \alpha_{(\lambda+1)'}, \ldots, \alpha_{\lambda+s} - \alpha_{(\lambda+s)'}\}.$$

由于 ρ 令 Satake 图不变，所以

$$\rho(\alpha_i - \alpha_{i'}) = \alpha_t - \alpha_{t'}.$$

所以 ρ 令 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$ 不变. 因为 ρ 是等距对应，所以 $\rho(\mathfrak{h}^-) = \mathfrak{h}^-$. 由此得 $\rho\sigma = \sigma\rho$. 从 Araki 的一个定理知 ρ 可以扩充为的一个自同构，即 $\rho \in W$. □

对第一类实单李代数，只有 A_l, D_l 和 E_6 时，才可能有 $W \ne \{I\}$. A_l: W 的阶为 2. D_l $(l > 4)$: $T \times A_{l-1}$ 时，W 的阶为 1; 其它情况，W 的阶为 2. D_4: W 的阶为 6. E_6: W 的阶为 2.

参考文献

[1] Araki, S. I., *On root system and an infinitesiml classification of irreducible symmetric spaces*, J. Math. Osaka City Univ. **13**(1962), 1-34.

[2] Berger, M., *Sur les espaces symétrique non compacts,* Ann. Sci. École Norm. Sup. **74**(1957), 85-177.

[3] Bourbaki, N., *Groupes et algèbres de Lie, (I-VIII)*, Hermann, Paris, (1960-1975).

[4] Cartan, É., *Les groupes réels simples finis et continus*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **31**(1914), 263-355.

[5] Cartan, É., *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann*, Bull. Soc. France **54**(1926), 214-264.

[6] Cartan, É., *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann,* Bull. Soc. France **55**(1927), 114-134.

[7] Cartan, É., *La géométrie des groupes simples*, Ann. Mat. Pura Appl. **4**(1927), 209-256. Compléments, Ann. Mat. Pura Appl. **5**(1928), 253-260.

[8] Cartan, É., *Sur la détermination d'un système orthogonal complete dans un espaces de Riemann symétrique clos*, Rend. Circ. Mat. Palermo **53**(1929), 217-252.

[9] Cartan, É., *Sur les représentations linéaires des groupes clos*, Comm. Math. Helv. **2**(1930), 269-283.

[10] Chevalley, C., *Theory of Lie groups, I*, Princeton Univ. Press, 1946.

[11] Chevalley, C., *Théorie des Groupes de Lie, II*, Hermann, Paris, 1951.

[12] Chevalley, C., *Théorie des Groupes de Lie, III*, Hermann, Paris, 1955.

[13] Dynkin, E. B., *The structure of semi-simple algebras* Uspekhi Mat. Nauk. **2**(1957), 59-127.

[14] Gantmacher, F., *Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie groups*, Mat. Sb. **5**(1939), 101-144.

[15] Gantmacher, F., *On the classification of real simple Lie groups*, Mat. Sb. **5**(1939), 217-249.

[16] Helgason, S., *Differentiial Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic, N.Y., 1978.

[17] Iwasawa, K., *On some types of topological groups*, Ann. of Math. **50**(1949), 507-558.

[18] Montgomery, D., and Zippin, L., *Topological Transformation Groups*, Wiley (Interscience), New York, 1955.

[19] Murakami, S., *On the automorephisms of a real semi-simple Lie algebra*, J. Math. Soc. Japan **4**(1952), 103-133.

[20] Murakami, S., *Supplements and corections to "On the automorephisms of a real semi-simple Lie algebra"*, J. Math. Soc. Japan **5**(1953), 105-112.

[21] Murakami, S., *Sur la classification des algèbres de Lie rélles et simples*, Osaka J. Math. **2**(1965), 391-307.

[22] Satake, I., *On representations and classifications of symmetric Riemann spaces*, Ann. of Math. **71**(1960), 77-110.

[23] Weyl, H., *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III*, Math. Z. **23**(1925), 271-309; **24**(1926), 328-376, 377-395; und Nachtrag, 789-791.

[24] Weyl, H., *The structure and representations of continuous groups*, Inst. Adv. Study, Princeton, New Jersey. Notes, 1935.

[25] Weyl, H., *The classical groups*, Princeton Univ. Pess, New Jersey, 1939.

[26] Yan Zhi-Da, *Sur les espaces symétriques non compacts*, Sci. Sinica **14**(1965), 31-36.

[27] Yan Zhi-Da, *Sur la sous-algèbres régulière de Lie semi-simple réele non-compact*, Sci. Sinica **14**(1965), 917-920.

[28] Yan Zhi-Da, *Sur l'isomorphisme d'un espace local symétriques à associé* , Sci. Sinica **17**(1966), 145-146.

[29] 严志达，论实单纯 Lie 代数的分类和它们的角图表示，科学记录 (新辑) **3**(1959), 213-217.

[30] 严志达，实单纯 Lie 代数的自同构，科学记录 (新辑) **3** (1959), 218-220.

[31] 严志达，李群与微分几何，人民教育出版社， 1960.

[32] 严志达，一个群论问题 (I), 数学进展， **5** (1962), 80-85.5

[33] 严志达，一个群论问题 (II), 数学进展， **12** (1962), 120-131.

[34] 严志达，半单纯李群李代数表示论，上海科技出版社，1963.

[35] 严志达，实半单纯李代数的拟内自同构，数学学报， **14** (1964), 387-391.

[36] 严志达，半单纯李代数的特征 (I), 南开大学学报， **4** (1964), No.1.

[37] 严志达，张庆毓，半单纯李代数的特征 (II), 数学学报，**15** (1965), 861-872.

[38] 严志达，实半单 Lie 代数的分类，数学进展， **9**(1966), 349-364.

[39] 严志达，实李代数讲义 (油印本)，广西民族学院， 1978.

[40] 严志达，许以超， Lie 群及其 Lie 代数，高等教育出版社， 1985.

附录I 论非紧致对称空间

作为 E. Cartan 对 Riemann 对称空间的推广，即讨论不一定是 Riemann 的 (riemannian) 一般对称空间的问题. 根据 Nomizy 的讨论，可以主要化为一个单纯李代数 (不一定是紧致的) 的对合自同构的研究. M. Berger[1] 证明了一个半单李代数的任一对合自同构必共轭于令一个固定的最大紧致子代数 (或称特征子代数) 不变的对合自同构. 因此它在特征子代数上诱导一个对合自同构. 由于特征子代数是紧致的，所以它的对合自同构的问题早已为 E. Cartan 和 Gantmacher 所解决. 但是任一个特征子代数的对合自同构不一定都可以作为整个代数的对合自同构的诱导. 换言之，它不一定可以扩充为整个李代数的对合自同构. 所以找出特征子代数的一个对合自同构可以扩充为整个代数的对合自同构的充分必要条件是研究非紧致对称空间中最关键的问题. M. Berger 得到了非紧致对称空间的完全分类，是对于特征子代数的各个对合自同构作了个别的考察，利用了很为复杂的计算而得到的. 本文的目的即在给出一个一般的判别法则. 利用它无需特殊的计算即可得到非紧致对称空间的分类. 不仅如此，我们觉得有了这个一般的判别理论，对称空间的研究才是完备的. 我们的方法是建筑在我们对于实半

单李代数分类及其自同构的理论上的. 关于这方面的结果请看 [3] 的第四章. 本文所用符号及定义都以该书为准.

I.1 问题

令 $\mathfrak{g}_u$ 是一个紧致李代数, t 是它的一个对合自同构. 称 t 是一个 G- 自同构, 如果它是 [3] 中的 Gantmacher 标准形, 即

$$t = t_0 e^{\mathrm{ad}\tilde{H}}, \quad \tilde{H} \in \mathfrak{h}, \tag{I.1.1}$$

t_0 是一个令一个固定 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 不变, 而同时令 $\mathfrak{h}$ 内某一组素根系 Π 不变的自同构, 而且对于任何 $\alpha \in \Pi$ 有 $t_0(X_\alpha) = X_{\alpha_1}$ (X_α 是对于 $\mathfrak{h}$ 所定的根 α 的不变子空间的基, 例如 Weyl 基.) 称这样的 t_0 是正则的 (canonique). 子代数 $\mathfrak{h}_1$ 由 $H \in \mathfrak{h}$ 且 $t(H) = H$ 所定义. 考虑 $\mathfrak{g}_u$ 的分解

$$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_1 + i\,V_1, \tag{I.1.2}$$

其中 $\mathfrak{g}_1$ 是 t 的对应 +1 的不变子空间, $i\,V_1$ 是对应 −1 的不变子空间.

作非紧致李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + V_1$. $\mathfrak{g}$ 的这个分解称为 Cartan 分解, 而称称为特征子代数. 可知它是最大紧致子代数.

现令 $\mathfrak{g}_1$ 的一个对合自同构也是 G- 自同构

$$\rho = \tau\, e^{\mathrm{ad}H}, \quad H \in \mathfrak{h}_1^0, \tag{I.1.3}$$

其中 τ 是正则的, 而 $\mathfrak{h}_1^)$ 是由

$$H \in \mathfrak{h}_1, \ \tau(H) = H$$

所定义的 $\mathfrak{h}_1$ 的子代数.

因为 $e^{\mathrm{ad}\,H}$ 是内自同构, 永远有一个自然的扩充, 所以欲寻求 ρ 的可否扩充的问题转化为寻求 τ 可否扩充的问题.

I.2 正则自同构的扩充

τ 既是正则自同构，它便令子代数 $\mathfrak{h}_1$ 不变，同时令 $\mathfrak{h}_1$ 内某一组素根系不变. τ 的扩充问题已经在 [2] 中得到解决，现将它写成一个定理.

定理 1 $\mathfrak{g}_1$ 的正则自同构 τ 可以扩充为 $\mathfrak{g}$ 的自同构的充分必要条件是 τ 还令特征表示 $\mathrm{ad}_{V_1}\mathfrak{g}_1$ 的权系不变. □

我们知道一个实半单李代数的素根系及特征表示的权系可以用图解来表示. 我们称它为 $\mathfrak{g}$ 的角图. 所以定理 1 简言之即表示 τ 将 $\mathfrak{g}$ 的角图不变.

利用实半单李代数的分类理论，我们可以进一步明确特征子代数 $\mathfrak{g}_1$ 的素根系及它的特征表示的首权. 结果述之如下.

令 $\mathfrak{g}_0$ 是由 (I.1.1) 中 t_0 的不变子空间生成的子代数. 它的素根系是由 $\mathfrak{g}_u$ 的素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_l\}$ 对于 $\mathfrak{h}_1$ 的正射影所成，令为 $\{\alpha_1',\ \alpha_2',\ \ldots,\ \alpha_\lambda'\}=\Pi'$ 我们知道，可以在 (I.1.1) 中永远选择这样的 $\tilde{H}$ 使得只有一个 Π' 的元素在 $\tilde{H}$ 上为非零的. 令这个元素为 α_1' 也就是说

$$(\alpha_1',\ \tilde{H})=\frac{1}{2},\ (\alpha_i',\ \tilde{H})=0,\ i>1. \tag{I.2.1}$$

令 $-\alpha_0'$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的首根.

$$\alpha_0'+m_1\alpha_1'+\cdots+m_\lambda\alpha_\lambda'=0, \tag{I.2.2}$$

其中 $m_i\ (1\leq i\leq\lambda)$ 为非负整数，并且 α_1' 还要有下面的条件.

1) $\alpha_1'=\alpha_1$, 即是说 $\alpha_1\in\mathfrak{h}_1$ (α_1 是 α_1 的射影);

2) $m_1=1$ 或 2.

利用上面所述的记号，我们对于由 (I.1.1) 所定的特征子代数 $\mathfrak{g}_1$ 的结构有下面的定理.

定理 2 (1) 如果 $t_0 = I$, $m_1 = 2$, 这时候, $\mathfrak{g}_1$ 的素根系由 $\{\alpha_0', \alpha_2', \ldots, \alpha_\lambda'\}$ 构成, 而它的特征表示首权系为 $\{-\alpha_1'\}$;

(2) 如果 $t_0 = I$, $m_1 = 1$, 这时候 $\mathfrak{g}_1$ 的素根系由 $\{\alpha_2', \alpha_3', \ldots, \alpha_\lambda'\}$ 构成, 而它的特征表示首权系为 $\{-\alpha_0', -\alpha_1'\}$;

(3) 如果 $t_0 \neq I$, 这时候 $\mathfrak{g}_1$ 的素根系由

$$\{\alpha_2', \alpha_3', \ldots, \alpha_\lambda', \beta_0\}$$

构成, β_0 是表示 $\mathrm{ad}_{V_0^C}\mathfrak{g}_0$ 的首权. 特征表示首权系为 $\{-\alpha_1'\}$.□

由上述定理所决定的 $\mathfrak{g}_1$ 的素根系及它的特征表示的首权系构成 $\mathfrak{g}_1$ 的角图.

I.3 一般性质

引理 1 令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + V_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 分解. 令 σ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构 $\sigma(X) = X$ 对于 $X \in \mathfrak{g}_1$ 成立. 于是, 如果 $\mathfrak{g}_1$ 无中心则 $\sigma = I$ 或 t, t 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构由 $t(X) = X$, $X \in \mathfrak{g}_1$; $t(X) = -X$, $X \in V_1$ 所定义. 如果 $\mathfrak{g}_1$ 有中心 $\mathfrak{z}$, 则 $\sigma = e^{\mathrm{ad}\, Z}$, $Z \in \mathfrak{z}$.

证 因为 $\sigma(X) = X$ 对 $X \in \mathfrak{g}_1$ 成立. 所以对 $X \in \mathfrak{g}_1$ 有

$$\sigma\, \mathrm{ad}\, X\, \sigma^{-1} = \mathrm{ad}\, X.$$

如果 $\mathfrak{g}_1$ 的特征表示是第一类型, 例如在上面定理 2 的 (1) 及 (3) 的情形, 则从 Schur 引理, 在 V_1 上有 $\sigma = \lambda$, λ 是常数. 利用 $\mathfrak{g}_1 = [V_1, V_1]$ 立刻可以得到 $\lambda^2 = 1$ 所以引理得证.

如果 $\mathfrak{g}_1$ 有中心, 例如定理 2 中的 (2). 由于 $t_0 = I$ 所以 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数的元素皆不变. 因之 σ 必为

$$\sigma = e^{\mathrm{ad}\, H}, \ H \in \mathfrak{h}_1$$

之形.

利用定理 2 可以看到 $(H,\ \alpha_i) \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,1)$ $i>1$, 同时因 $m_1=1$, 所以

$$\alpha' \equiv \pm\alpha_1'\,(\mathrm{mod}\,\alpha_2',\ \ldots,\ \alpha_\lambda')$$

对 $X_\alpha \in V_1^C$ 成立. 于是我们可以令 Z 合于

$$(Z,\ \alpha_i)=0,\ i>1;\ (Z,\ \alpha_1')=(H,\ \alpha_1').$$

这样的 Z 是存在的且属于 $\mathfrak{z}$, 它有

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{ad}\,Z}(X_{\alpha_1'}) &= e^{\pm 2\pi\sqrt{-1}(Z,\ \alpha_1')}X_{\alpha'} \\ &= e^{\pm 2\pi\sqrt{-1}(H,\ \alpha_1')}X_{\alpha'} \\ & e^{\mathrm{ad}\,H}(X_{\alpha'}) \end{aligned}$$

对于任何 $X_{\alpha'} \in V_1^C$ 成立. 于是 $e^{\mathrm{ad}\,Z}=e^{\mathrm{ad}\,H}$. 故引理得证. □

由此可以得到下面一个推论. 这个推论首先是由 Berger 得到的 ([1]).

推论 令 σ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个对合自同构 ρ 的对合扩充. 则所有 ρ 的对合扩充为 σ 或者 $\sigma\cdot t$.

证明显然. □

现在先考虑特征子代数 $\mathfrak{g}_1$ 有一个中心 $\mathfrak{z}$ 的情形, 同时 $\mathfrak{g}_1$ 的对合自同构 ρ 令 $\mathfrak{z}$ 内的元素都不变, 即 $\rho(Z)=Z$ 对 $Z\in\mathfrak{z}$ 成立. (一般因为 $\rho(\mathfrak{z})=\mathfrak{z}$ 所以 $\rho(Z)=\lambda Z$, $\mathfrak{z}$ 是一维的. 由于 $\rho^2=I$ 所以 $\rho(Z)=\pm Z$.) 假定 ρ 是可扩充的. 现在进而证明可以扩充为 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构.

命题 1 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数, 它的特征子代数 $\mathfrak{g}_1$ 有中心 $\mathfrak{z}$. ρ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的对合自同构, ρ 令 $\mathfrak{z}$ 内的元素都不变. 如果 ρ 可以扩充为 $\mathfrak{g}$ 的自同构, 则必可以扩充为 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构.

证 利用引理 1, 则 ρ 的任一扩充 σ' 必可写作

$$\sigma' = \sigma \cdot e^{\mathrm{ad}\, Z}, \ Z \in \mathfrak{z}.$$

条件 $\rho(Z) = Z$ 表示 σ 和 $e^{\mathrm{ad}, Z}$ 是可换的，于是

$$(\sigma')^2 = \left(\sigma \cdot e^{\mathrm{ad}\, Z}, \ Z \in \mathfrak{z}\right)^2 = \sigma^2 \cdot e^{2\mathrm{ad}\, Z}.$$

并利用引理 1 有 $\sigma^2 = e^{\mathrm{ad}\, H}$, $H \in \mathfrak{z}$ (因 $\sigma^2 = \rho^2 = I$ 在 $\mathfrak{g}_1$ 上成立), 所以有

$$\sigma'^2 = e^{\mathrm{ad}\,(H+2Z)}.$$

类似于引理 1 的证明末段的理由, 我们可以选取 Z 使得 $\sigma'^2 = I$, 即 σ' 是对合的. □

由此可见对于所讨论的情形，对合自同构 ρ 可以扩充为对合自同构的充分必要条件是 ρ 是可以扩充的. 这就可以由 I.2 定理 1 去解决它. 因此我们以后就不讨论这一情形. 最后应该指出 $\rho(Z) = Z$ 的条件等价于 ρ 令特征子代数的首权都不变. 注意 ρ 令特征表示的首权系 $\{-\alpha_0', -\alpha_1'\}$ 不变，它可以令两个元素都不变，也可能使它们互换.

I.4 两个命题

现在及以后除了特别指出外，不再讨论上面命题 1 讨论的情形. 对于其它的情形，我们有下面两个命题.

命题 2 一个 $\mathfrak{g}_1$ 的对合自同构 ρ 的任一扩充为对合的充分必要条件是存在一个扩充为对合的.

证 (1) 如果 $\mathfrak{g}_1$ 无中心，则所有的 ρ 的扩充 $\sigma' = \sigma$ 或 $\sigma \cdot t$, 其中 σ 是一个对合扩充. 如果 $\sigma' = \sigma$, 则命题显然. 如果

$\sigma' = \sigma \cdot t$, 考虑 σ 和 t 的可换性, 则 $\sigma'^2 = (\sigma \cdot t)^2 = \sigma^2$. 命题得证.

(2) 如果 $\mathfrak{g}_1$ 有中心 $\mathfrak{z}$, 对于任何的 $Z \in \mathfrak{z}$ 必须有 $\rho(Z) = -Z$, 这就有 $\sigma \cdot e^{\operatorname{ad} Z} = e^{-\operatorname{ad} Z} \cdot \sigma$ ρ 的任一扩充 $\sigma' = \sigma \cdot e^{\operatorname{ad}|,Z}$. 于是, $\sigma'^2 = \left(\sigma \cdot e^{\operatorname{ad} Z}\right) = \sigma^2$. 命题得证. □

命题 3 令 σ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的任一个对合自同构 ρ 的扩充, 则有 $\sigma^2 = I$ 或 $\sigma^2 = t$.

证 (1) 如果 $\mathfrak{g}_1$ 不含中心, σ^2 是 ρ^2 ($= I$ 在 $\mathfrak{g}_1$ 上) 的扩充, 从命题 2 的 (1) 知 $\sigma^2 = t$ 或 I, 命题得证.

(2) 如果 $\mathfrak{g}_1$ 有中心 $\mathfrak{z}$, 不妨假定 ρ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的 G- 自同构, 因之它令 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1$ 不变, 所以 ρ 将 $\mathfrak{g}_1^C$ 的根系互变, $\alpha \in \Delta'$ 则 $\rho(\alpha)$ 也是根. 同时 ρ 的扩充 $\sigma(X_\alpha) = \nu_\alpha X_{\rho(\alpha)}$. 所以 $\sigma^2(X_\alpha) = \nu_\alpha \nu_{\rho(\alpha)} X_\alpha$. 同样 $\sigma^2(X_{\rho(\alpha)}) = \nu_\alpha \nu_{\rho(\alpha)} X_{\rho(\alpha)}$. 另一方面 σ^2 是 $\sigma^2(= I)$ 的扩充, 从引理 1 对于 $X_\alpha \in V_1^C$ 恒有

$$\begin{cases} \sigma^2(X_\alpha) = \lambda X_\alpha \ (\alpha > 0), \\ \sigma^2(X_{-\alpha}) = \lambda^{-1} X_{-\alpha}. \end{cases} \tag{I.4.1}$$

而 $\lambda = e^{2\pi\sqrt{-1}(Z,\ \alpha)}$ $(\alpha > 0)$, 对任何 $\alpha > 0$ 成立.

由于 $\rho(Z) = -Z$, 则

$$(Z,\ \alpha) = (\rho(Z),\ \rho(\alpha) = (-Z,\ \rho(\alpha)).$$

如果 α 是 $\operatorname{ad}_{V_1^C}\mathfrak{g}_1$ 的权, 如果 $\alpha > 0$, 则显然 $\rho(\alpha) < 0$. 从 (6) 可知

$$\lambda = \nu_\alpha \nu_{\rho(\alpha)} = \nu_{\rho(\alpha)} \nu_\alpha = \lambda^{-1}.$$

于是 $\lambda^2 = 1$, 即 $\lambda = \pm 1$. 如果 $X_\alpha \in V_1^C$, 恒有 $\sigma^2(X_\alpha) = X_\alpha$ 或 $\sigma^2(X_\alpha) = -X_\alpha$. 命题得证. □

$\mathfrak{g}_1$ 的对合自同构 ρ 的扩充 σ 称为固有的, 若 σ 合于 $\sigma^2 = I$; σ 称为非固有的, 若 $\sigma^2 = t$.

由于命题 1 和 2, 可见定义是有意义的.

现在一般地考虑 (I.1.3) 式中的 ρ. 假定 τ 是可扩充的. 则 ρ 有一个对合扩充的充分必要条件是 (根据命题 2) $\tau e^{\operatorname{ad} H}$ 是对合的, 式中的 τ 表示 τ 的任一个扩充, $e^{\operatorname{ad} H}$ 表示自然扩充. 这等于说:

$$e^{2\operatorname{ad} H} = \begin{cases} I, & \text{如果 } \tau \text{ 是固有的;} \\ t, & \text{如果 } \tau \text{ 是非固有的.} \end{cases} \tag{I.4.2}$$

现在问题只在于决定 $\mathfrak{g}_1$ 的对合自同构的固有性. 这在下节中将予以讨论.

I.5 固有及其固有自同构

上节的讨论化为求 $\mathfrak{g}_1$ 的自同构, 特别是正则自同构的固有性问题. 要解决这个问题, 先考虑 V_1^C 上的一个双线性型

$$\Phi(X,\ Y) = (\sigma(X),\ Y),\quad X,\ Y \in V_1^C,$$

$(X,\ Y)$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 显然 Φ 是非退化的.

令 $\mathfrak{g}_{11}$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 内由 ρ 所定的特征子代数, 于是对于任何 $X' \in \mathfrak{g}_{11}$ 恒有

$$\begin{aligned} &\Phi(\operatorname{ad} X'(X),\ Y) \\ &= (\sigma([X',\ X]),\ Y) = (X',\ \sigma(X)],\ Y) \\ &= -(\sigma(X),\ [X',\ Y]) = -\Phi(X,\ \operatorname{ad} X'(Y)). \end{aligned}$$

即是说 Φ 是诱导表示 $\operatorname{ad}_{V_1}\mathfrak{g}_{11}$ 的一个不变双线性型. 又因

$$\begin{aligned} \Phi(Y,\ X) &= (\sigma(Y),\ X) = (\sigma^2(Y),\ \sigma(X)) \\ &= (\sigma(X),\ \sigma^2(Y)) = \pm\Phi(X,\ Y), \end{aligned}$$

上式中正负号的选取，视 σ^2 在 V_1 上等于 $\pm I$ 而定，也就是说，视 ρ 是固有的或非固有的而定，视 Φ 是对称的或反对称的而定.

命题 4 $\mathfrak{g}_1$ 的正则自同构是固有的或非固有的视特征表示 $\mathrm{ad}_{V_1^C}\mathfrak{g}_1$ 是偶型或奇型而定.

(**注意**: $\mathrm{ad}_{V_1^C}\mathfrak{g}_1$ 的任一不可约表示与另一个不可约表示同时为偶型或同时为奇型.)

证 令 V_1' 是 V_1^C 的任一不可约不变子空间. 先证 Φ 在 V_1' 上也是非退化的. 如果 $\mathrm{ad}_{V_1^C}\mathfrak{g}_1$ 是第一类型的，这是显然的. 如果 $\mathrm{ad}_{V_1^C}\mathfrak{g}_1$ 是第二类型的，则 $V_1^C = V_1' + \overline{V_1'}$ 其中 $\overline{V_1'}$ 是 V_1^C 中 V_1' 的共轭映像 (对于 $\mathfrak{g}$ 而言). 因为 $\rho(Z) = -Z$, 所以 $\sigma(V_1') = \overline{V_1'}$, $\sigma(\overline{V_1'}) = V_1'$. 如果有一个 $X_1 \in V_1'$ 且 $\Phi(X_1, V_1') = 0$, 则

$$\Phi(\sigma(X_1),\ V_1^C) = (\sigma(X_1),\ V_1' + \overline{V_1'}) = \Phi(X_1,\ V_1'),$$

因为

$$\Phi(\sigma(X_1),\ \overline{V_1'}) = (X_1,\ \sigma(\overline{V_1'})) = (X_1,\ V_1') = 0.$$

所以如果 $\Phi(X_1, V_1') = 0$, 则 $\Phi(X_1, V_1^C) = 0$, 即 Φ 在 V_1 上是退化的，与假设不符.

现在令 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组素根系，$\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_\delta'$ 是 $\mathfrak{g}_{11}$ (ρ 的特征子代数) 的素根系. 由于 ρ 的正则性，所以 $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_\delta'$ 是 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda$ 对于 $\mathfrak{h}_1^0$ 的正射影. 令 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}_{11}$ 的一个三维单子代数，称为主子代数. 即 $\mathfrak{g}_0$ 的定义向量 H 由下式而定

$$(H,\ \beta_i) = 2,\ 1 \le i \le \lambda. \tag{I.5.2}$$

所以 $\mathfrak{g}_0$ 也是 $\mathfrak{g}_1$ 的主子代数.

令 Λ 是表示 $\mathrm{ad}_{V_1'}\mathfrak{g}_1$ 的首权，它在 $\{H\}$ 上的诱导为 Λ_0, Λ_0 是 $\mathrm{ad}_{V_1'}\mathfrak{g}_1$ 对 $\mathfrak{g}_0$ 的诱导表示的最高权. 令 $\Lambda = \sum_{i=1}^{\lambda} s_i\beta_i$, 则

$$(\Lambda_0,\ H) = (\Lambda,\ H) = 2\sum_{i=1}^{\lambda} s_i = T, \qquad \text{(I.5.3)}$$

T 是表示 $\mathrm{ad}_{V_1'}\mathfrak{g}_1$ 的长度. 因为 Φ 对于表示 $\mathrm{ad}_{V_1'}\mathfrak{g}_{11}$ 是不变双线性型，对于 $\mathrm{ad}_{V_1'}\mathfrak{g}_0$, V_1' 分为若干不可约分支，其中只有唯一的一个分支有首权 Λ_0. 从 Malcev ([2]) 的一个结果则对于上述分支的不变子空间而言 Φ 必须是非退化的，并且 Φ 在 V_1' 上是对称的或反对称的，视 Φ 在这个分支上是对称的或反对称而定. 但是以首权为 Λ_0 的 $\mathfrak{g}_0$ 的表示容许非退化的对称或反对称的双线性型，视 $(\Lambda_0,\ H)$ 是偶数或奇数而定. 但是 $(\Lambda_0,\ H) = T$. 这就是说，视 $\mathrm{ad}_{V_1,}\mathfrak{g}_1$ 是偶型或奇型而定. 于是定理得证. □

利用 Dynkin 关于表示长度的计算，我们可以知道下述推论.

推论 正则自同构是固有的，只是在 $\mathfrak{g} = A_n^i$ 而 $n \equiv 0 \pmod 2$ 的情形下是固有的.

应该注意 $\mathfrak{g}_1$ 的对合自同构只是在实单李代数属于定理 2 的 (1) 和 (3) 的情形下 $\tau = I$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的正则自同构，所以有一个 $\sigma = I$ 的扩充因之是固有的，所以 $\mathrm{ad}_{V_1}\mathfrak{g}_1$ 是偶型，任何正则自同构是固有的. 在 (2) 的情形下 $\tau = I$ 的正则自同构不合条件，所以问题只须对于 (2) 即 $\mathfrak{g}_1$ 含有中心的情形下始有必要利用命题 4 以决定正则自同构的固有性.

余下来的只须决定 (I.1.3) 中内自同构 $e^{\mathrm{ad}\,H}$ 的正则扩充的平方何时是 I, 何时是 t 即可. 利用作者关于单李代数构造的理论有以下命题.

命题 5 (1) $t_0\neq I$, $e^{\mathrm{ad}\,H}$ 是对合的.

(2) $t_0=I$, α_i, α_k 是两个在 H 上不为零的根, m_i, m_k 是 (I.2.2) 式中定义的正整数 (如果根本没有 α_i, 视 $m_i=0$, 且假定 $m_0=1$), 则条件

$$m_i+m_k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2) \tag{I.5.4}$$

是 $e^{\mathrm{ad}\,H}$ 为对合的充分必要条件.

证 (1) $t_0\neq I$.

从 §2 定理 2 知 $\mathfrak{g}_1$ 的素根系为 $\{\beta_0',\ \alpha_2',\ \ldots,\ \alpha_\lambda'\}$ 其中 β_0 是 $\mathrm{ad}_{V_0}\mathfrak{g}_0$ 的首权, 已经知道有关系 (参看 [3])

$$\beta_0'+\alpha_1'+n_2\alpha_2'+\cdots+n_\lambda\alpha_\lambda'=0, \tag{I.5.5}$$

其中 n_i 为整数.

令 α_i', α_k' 是这样的 $\mathfrak{g}_1$ 的素根 $(\alpha_i',\ H)=(\alpha_k',\ H)=\frac{1}{2}$, 而 $(\alpha_t',\ H)=0$, $t\neq i,\ k,\ i,\ k$ 可以在 0, 2, 3, …, λ 中取值, 而且假定 α_0' 即为 β_0'. 从 (I.5.5) 式有

$$(\alpha_i',\ H)=-\frac{1}{2}(n_i+n_k).$$

令 $Y_{\alpha_i'}$ 是对应 α_i' 的 V_1^C 的一个权向量, 这个表示的首权是 $-\alpha_i'$. 于是有

$$\begin{aligned} e^{2\mathrm{ad}\,H}Y_{\alpha_i'} &= e^{4\pi\sqrt{-1}(\alpha_i',\ H)}Y_{\alpha_i'} \\ &= e^{-2\pi\sqrt{-1}(n_i+n_k)}Y_{\alpha_i'} \\ &= Y_{\alpha_i'} \end{aligned} \tag{I.5.6}$$

但是 $e^{2\mathrm{ad}\,H}$ 在 $\mathfrak{g}_1$ 上是恒等对应, 所以由引理 1 $e^{2\mathrm{ad}\,H}=I$ 或 t. 但由于 (I.5.6) 式, 必须 $e^{2\mathrm{ad}\,H}=I$, 即 $e^{\mathrm{ad}\,H}$ 是对合的.

(2) $t_0 = I$, $\mathfrak{g}_1$ 无中心，这时候，必须 $m_1 = 2$. 而 $\mathfrak{g}_1$ 的素根系为 $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_l, \alpha_0)$, 式中 $-\alpha_0$ 为首根， $-\alpha_1$ 是表示 $\mathrm{ad}_{V_1}\mathfrak{g}_1$ 的首权. 同上的理由， $e^{\mathrm{ad}\,H} = I$ 或 t. 它为 I 或 t 的充分必要条件是对 V_1 内任一个向量如 Y_{α_1} 有 $e^{2\mathrm{ad}\,H}Y_{\alpha_1} = \pm Y_{\alpha_1}$. 令 α_i, α_k 为不在 H 为零的素根， i, k 可以取 0, 2, 3, $\ldots$, λ. 且假若 $m_0 = 1$, 从 (I.2.2) 式有

$$\alpha_0 + 2\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_l\alpha_l = 0. \tag{I.5.7}$$

由此可知

$$2(\alpha_1,\ H) = -\frac{1}{2}(m_i + m_k).$$

所以

$$e^{2\mathrm{ad}\,H}Y_{\alpha_1} = e^{4\pi\sqrt{-1}}Y_{\alpha_1} = e^{\pi\sqrt{-1}(m_i+m_k)}Y_{\alpha_1}.$$

所以

$$m_i + m_k \equiv 0 \pmod 2$$

是 $e^{\mathrm{ad}\,H}$ 为对合的充分必要条件.

(3) $t_0 = I$, $\mathfrak{g}_1$ 有中心，这时 $m_1 = 1$, 类似 (I.5.7) 式，从 (I.2.2) 式有

$$\alpha_0 + \alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_l\alpha_l = 0. \tag{I.5.8}$$

α_i, α_k 中的 i, k 可以取值 2, 3, $\ldots$, l. 仍旧由于条件 $\rho(Z) = -Z$, 所以两个首权互换. 事实上， $\alpha_1 > 0$, 则 $\rho(\alpha_1) < 0$, 而 $\rho(\alpha_1) = \alpha_1$ 或 α_0, 所以 $\rho(\alpha_1) = \alpha_0$, 即 $\rho(\alpha_0) = \alpha_1$. 且由于 $\rho(H) = H$, 所以有 $(\rho(H),\ \rho(\alpha_0)) = (H,\ \alpha_1)$ 以 i 代入上面 (I.5.8) 式知

$$4\pi\sqrt{-1}(\alpha_0,\ h) + \pi\sqrt{-1}(m_i + m_k) = 0.$$

这就有

$$\begin{aligned} e^{2\operatorname{ad} H} X_{\alpha_0} &= e^{4\pi\sqrt{-1}(\alpha_0,\ H)} X_{\alpha_0} \\ &= e^{-\pi\sqrt{-1}(m_i+m_k)} X_{\alpha_0}. \end{aligned}$$

所以 $e^{2\operatorname{ad} H} = I$ 或 t 视 $(m_i + m_k) \equiv 0 \pmod 2$ 或 $1 \pmod 2$ 而定. 定理得证. □

附录 I 参考文献

[1] Berger, M., *Sur les espaces symmetriques non-compacts*, Ann. Sci. École. Norm. Sup. 74(1957), 85-177.

[2] 严志达, 李群和微分几何, 1960, 人民教育出版社.

[3] 严志达, 半单纯 Lie 群 Lie 代数表示论, 1962, 上海科技出版社.

附录 II 论相配局部对称空间的自同构

非紧致局部对称空间的分类具体的为 Berger 算出. 同时 Berger 指出求出一个特征子代数对合自同构的扩充的一般判别法将是重要的. 作者在前文中得出了. 以后为了完成分类的理论在本文中给出一个特征子代数的同一对合自同构对应的两个相配的 E. L. S. 何时是共轭的的充分必要条件. 如 Berger 没有给出扩充的充分必要条件一样, 他也没有给出相配 E. L. S. 同构的充分必要条件. 这个条件是 (II.4.8). 它的具体应用见 II.6. 这里也可以看作作者关于拟内自同构群讨论的一个很好的应用.

II.1 引言

一个李代数 $\mathfrak{g}$ 和它的子代数 $\mathfrak{g}_1$ (都是实数域上的李代数) 所定义的局部齐性空间称为局部对称空间, 以下也简称对称空间, 如果 $\mathfrak{g}_1$ 是由 $\mathfrak{g}$ 的一个对合自同构 σ 的不变点集构成, 以 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ 表示局部对称空间. 不可约局部对称空间的讨论主要的可化为考虑 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数. 令 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 分解. 从共轭意义下, 根据 Berger 的一个定理可以假定 σ 令 $\mathfrak{k}$ 不变. 这样 σ 在 $\mathfrak{g}$ 上诱导一个 $\mathfrak{k}$ 的对合自同构 ρ, 而 σ 是 ρ 的对

合扩充. 令

$$\mathfrak{k}_1 = \{X \in \mathfrak{k} | \sigma(X) = X\}, \quad \mathfrak{p}_1 = \{X \in \mathfrak{p} | \sigma(X) = X\}.$$

于是 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1$, 因之 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 成一个紧致局部对称空间. 在 §2 中我们将证明局部空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ 的同构, 首先需要 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 的同构, 而后者即 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 的分类已由 E. Cartan 和 Gantmacher 等所解决. 所以不妨假定 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 是一个固定的 E. L. S. (局部对称空间), 而考虑由它所定的对合自同构 ρ 在原李代数 $\mathfrak{g}$ 上任意的对合扩充. 在 [4] 中作者给出了 $\mathfrak{k}$ 的对合自同构存在对合扩充的充分必要条件, 这就决定了所有的 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 的可能. 因此问题化为同一个 $\mathfrak{k}$ 的对合自同构 ρ 的所有不同的对合扩充的问题. 在 $\mathfrak{g}$ 是单的假定下, 根据 Berger 的结果 [1] (在 §2 中有简单的证明), 任何 ρ 的对合扩充必共轭于一个固定的对合扩充 σ 或者 σt, t 是 Cartan 分解所定的自同构. 这样对应两个不同的 E. L. S. 我们称它们是相配的局部对称空间. 于是 E. L. S. 的分类尚须寻求两个相配对称空间何时同构. 即何时它们在 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ 的内自同构群) 下共轭. 令 $\mathfrak{p}_{-1} = \{X \in \mathfrak{p} | \sigma(X) = -X\}$. 于是 σt 所定的子代数 $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_{-1}$ 相配空间同构, 即是存在一个 $\gamma \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ 使得 $\gamma(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1$. 如果 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 所定的相配空间共轭, 则它定义了唯一的一个 E. L. S. 的类, 如果不共轭则对应 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 有两个不等价的类.

Ⅱ.2 初步结果

在以后的讨论中, 我们假定 $\mathfrak{g}$ 是单李代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ 是它的一个 Cartan 分解. t 是由它所定义的 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构, 即

$$t(X) = X,\ \forall X \in \mathfrak{k}, \quad t(X) = -X,\ \forall X \in \mathfrak{p}.$$

现在先证明

定理 1 单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解中任一 $\mathfrak{k}$ 的对合自同构 ρ 可扩充为 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构，则扩充必共轭于固定的对合扩充 σ 或 σt.

证 从本附录参考文献 [4] 中的引理如果 σ' 是 ρ 的一个扩充，则 $\sigma^{-1}\sigma'$ 在 $\mathfrak{k}$ 上是恒等的，所以 $\sigma' = \sigma$ 或者 $\sigma' = \sigma t$. 在 $\mathfrak{k}$ 无中心的假设下成立，于是定理得证. 如果 $\mathfrak{k}$ 有中心 $\mathfrak{z}$, 则 $\sigma' = \sigma\, e^{\operatorname{ad} Z}$, $Z \in \mathfrak{z}$. 如 $\rho(Z) = Z$ 于是,

$$\sigma'^2 = \sigma^2 e^{2\operatorname{ad} Z} = e^{2\operatorname{ad} Z} = I.$$

这就有 $\sigma' = \sigma t$. 如果 $\rho(Z) = -Z$, 即得 $\sigma\, e^{\operatorname{ad} Z} = e^{-\operatorname{ad} Z}\sigma$. 因此

$$\sigma' = \sigma e^{\operatorname{ad} Z} = e^{-\frac{1}{2}\operatorname{ad} Z}\sigma e^{\frac{1}{2}\operatorname{ad} Z} \sim \sigma.$$

所以命题得证. □

推论 如果 $\mathfrak{k}$ 有中心 $\mathfrak{z}$, 而且 ρ 是外自同构 $\rho(Z) = -Z$, $Z \in \mathfrak{z}$ 成立，则所对应的相配空间是同构的.

定义 1 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构 $\sigma, \sigma t$ 所对应的 E. L. S. 称为相配的 E. L. S..

定义 2 两个 $\mathfrak{g}$ 的 E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_2$ 称为同构或共轭的如果存在一个 $\gamma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ 使得 $\gamma(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$.

令 σ_1, σ_2 是对应 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构，则此定义就等价于 $\gamma\sigma_1\gamma^{-1} = \sigma_2$ (参看 Ⅱ.5 引理).

定理 2 如果 t 是第二类型的 (t 是外自同构), 则相配对称空间不同构.

证 如果 t 是第二类型的，即 t 是 $\mathfrak{g}^C$ 的外自同构，而 σ 是 $\mathfrak{g}^C$ 的对合自同构，与 t 可换. 如果 $\mathfrak{g}^C \neq D_4$, 则 σ 必须是内自同构. 如果 $\mathfrak{g}^C = D_4$, 利用可换的性质， σ 也必须是内自

同构. σ, σt 作为 $\mathfrak{g}^C$ 的自同构在 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}^C$ 内不共轭，所以它们作为 $\mathfrak{g}$ 的自同构自然也不共轭. □

定理 3 令

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{k}_i \subseteq \mathfrak{k},\ \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p},\ i = 1\,2$$

是两个 $\mathfrak{g}$ 的对称空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_i$ 所定的子代数，则

$$\mathfrak{g}_1 \sim \mathfrak{g}_2$$

的必要条件是 $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ 在 $\mathfrak{k}$ 内共轭.

证 首先因为 $\mathfrak{g}_i^C$ 是可约李代数，所以 $\mathfrak{g}_i$ 也是可约的. 于是 $\mathfrak{g}_i$ 可以书作 $\mathfrak{g}_i = C_i + \mathfrak{g}_i'$, 其中 C_i 是中心， $\mathfrak{g}_i'$ 是半单的李代数. t (由 Cartan 分解所定的 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构) 令 $\mathfrak{g}_i$ 不变，所以令它的中心 C_i 和 $\mathfrak{g}_i'$ 不变. 因之 C_i 可唯一地分解为 $C_i = C_i^0 + C_i^1$, 其中 $C_i^0 \subseteq \mathfrak{k}$, $C_i^1 \subseteq \mathfrak{p}$. 我们称 $\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可约子代数. 如果 $\mathfrak{g}_i' = \mathfrak{k}_i' + \mathfrak{p}_i'$ 是 $\mathfrak{g}_i'$ 的一个 Cartan 分解，则称

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{k}_i = \mathfrak{k}_i' + C_i^0,\ \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i' + C_i^1$$

为 $\mathfrak{g}_i$ 的 Cartan 分解. (注意，可约李代数的子代数的 Cartan 分解只对可约子代数定义). 现在假定 $\mathfrak{g}_1 \sim \mathfrak{g}_2$, 即，存在一个 $\gamma_1 \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ 使得 $\gamma_1(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$. 于是

$$\mathfrak{g}_2 = \gamma(\mathfrak{k}_1) + \gamma(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{p}_2$$

是 $\mathfrak{g}_2$ 的两个 Cartan 分解. $\mathfrak{g}_2$ 的两个 Cartan 分解是共轭的，这是因为 $\mathfrak{g}_2'$ 的 Cartan 分解在 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_2'$ 内共轭. 这个共轭将 $\mathfrak{g}_2$ 的中心 C_2 不变，因为 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_2' \subseteq \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_2$, 所以它还分别令 C_2^0, C_2^1 不变. 于是可以假定存在一个 $\gamma_0 \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_2$ 使得

$$\gamma_0\gamma_1(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2, \quad \gamma_0\gamma_1(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2.$$

令 $\gamma_2=\gamma_0\gamma_1\in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$, 则它将 $\mathfrak{k}_1$ 对应 $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{p}_1$ 对应 $\mathfrak{p}_2$.

由于

$$\mathfrak{g}=\gamma_2(\mathfrak{k})+\gamma_2(\mathfrak{p})=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的两个 Cartan 分解，而且

$$\gamma_2(\mathfrak{k}_1)=\mathfrak{k}_2\subseteq\gamma_2(\mathfrak{k})\cap\mathfrak{k},\quad \gamma_2(\mathfrak{p}_1)=\mathfrak{p}_2\subseteq\gamma_2(\mathfrak{p})\cap\mathfrak{p},$$

所以存在一个 $\gamma_3\in\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ 使得

$$\gamma_3\gamma_2(\mathfrak{k})=\mathfrak{k},\quad \gamma_3\gamma_2(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}.$$

而且 γ_3 令 $\mathfrak{k}_2,\mathfrak{p}_2$ 内的元素都不变. 令 $\gamma=\gamma_3\gamma_2$ 于是 γ 就有下面的性质:

1) $\gamma(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_2$ 而且 $\gamma(\mathfrak{k}_1)=\mathfrak{k}_2$, $\gamma(\mathfrak{p}_1)=\mathfrak{p}_2$;

2) γ 令 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{p}$ 都不变.

由于 2), 存在一个 $\gamma_0\in\operatorname{Int}\mathfrak{k}$ 它与 γ 在 $\mathfrak{k}$ 上的诱导一致. 故 γ_0 将 $\mathfrak{k}_1$ 对应于 $\mathfrak{k}_2$, 也就是说在 $\mathfrak{k}$ 内 $\mathfrak{k}_1\sim\mathfrak{k}_2$. □

这个定理使得 E. L. S. 的分类首先化为 $\mathfrak{k}$ 的 E. L. S. 的分类. 于是我们可以在 $\mathfrak{k}$ 内取定一个固定的特征子代数 $\mathfrak{k}_1$, 由对合自同构 ρ 所决定，而讨论 ρ 在 $\mathfrak{g}$ 的扩充对合自同构的共轭性. 利用定理 1 即考虑 σ 和 σt 的共轭，即两个相配 E. L. S. 的同构.

现在让我们将上面的讨论应用到相配的 E. L. S. 上去. 令 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ 是单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解, 令 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{k}$ 的一个 Cartan 子代数. 令 $\mathfrak{k}$ 的对合自同构 ρ 是下面的 G- 自同构，即

$$\rho=\tau e^{\operatorname{ad}H},\quad H\in\mathfrak{h}_0, \tag{II.2.1}$$

τ 令 $\mathfrak{k}$ 的一组素根系 $\Pi(\mathfrak{k})$ 不变，即 $\tau(\Pi(\mathfrak{k}))=\Pi(\mathfrak{k})$, 而且对于任何 $\alpha\in\Pi(\mathfrak{k})$ 有

$$\tau(X_\alpha)=X_{\tau(\alpha)},$$

X_α 是对应 $\mathfrak{k}$ 的根 α 的 Weyl 基，(Ⅱ.2.1) 中的

$$\mathfrak{h}_0 = \{H \in \mathfrak{h} | \tau(H) = H\},$$

是特征子代数 $\mathfrak{k}$ 的 Cartan 子代数.

在上面定理 3 的证明中，事实上已经证明存在一个 γ 令 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{p}$ 都不变，而且 $\gamma(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2$, $\gamma(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2$, 如果 $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i$ 是两个 E. L. S. 的特征子代数. 令 σ 是 $\mathfrak{g}_1$ 所定的对合自同构，它是 ρ 的一个扩充. 则 $\mathfrak{p}$ 对于 σ 可以分解

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_{-1}, \tag{Ⅱ.2.2}$$

$\mathfrak{p}_{\pm 1}$ 分别为 $\mathfrak{p}$ 中对于 σ 的对应 ± 1 的特征子空间. 于是 $\mathfrak{g}_1$ 的相配 E. L. S. 的子代数 $\mathfrak{g}_2$ 以 $\mathfrak{g}_{-1}$ 表示之，有

$$\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_{-1}.$$

这样 $\gamma(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_1$, $\gamma(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_{-1}$.

因 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{k}_1$ 的 Cartan 子代数，所以 $\gamma(\mathfrak{h}_0)$ 也是 $\gamma(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_1$ 的 Cartan 子代数. 因之有一个 $\gamma_0 \in \operatorname{Int} \mathfrak{k}_1$ 使得 $\gamma_0\gamma(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$. 令 $\gamma' = \gamma_0\gamma$, 它有 γ 同样的性质，同时令 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0$ 不变. 由于 $\mathfrak{h}_0$ 包含 $\mathfrak{k}^C$ 的一个正规元，所以 $\mathfrak{h}$ 和 $\gamma(\mathfrak{h})$ 都是 $\mathfrak{k}$ 的 Cartan 子代数，而且包含同一个正规元，因之 $\gamma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, 即 γ 令 $\mathfrak{h}$ 也不变.

推论 用上面的符号，如果 $\mathfrak{g}$ 的两个相配 E. L. S. 共轭，则共轭对应 $\gamma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ 有下面性质：

1) 令 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解不变;

2) $\gamma(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_1$;

3) 令 $\mathfrak{k}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 不变.

注意 1 从 3) 和 2) 和 γ 在 $\mathfrak{k}$ 上和 σ 的限制 ρ 可换，所以 $\gamma(\mathfrak{h}_0)=\mathfrak{h}_0$.

注意 2 γ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构群的元素，但是它在 $\mathfrak{k}$ 上，因之在 $\mathfrak{h}$ 上的诱导可以和 $\mathfrak{k}$ 的内自同构群中的一个元素 γ_0 一致，因之 γ 在 $\mathfrak{h}$ 上的诱导属于 $\mathfrak{k}$ 的 Weyl 群.

这样就导致我们讨论一个紧致对称空间 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 的 $\mathfrak{k}$ 的自同构群中令 $\mathfrak{k}_1$ 不变的元素在 $\mathfrak{h}$ 上的诱导.

Ⅱ.3 $\widetilde{\alpha}$ 群

$\mathfrak{k}_1$ 是由紧致李代数 $\mathfrak{k}$ 的对合自同构 ρ 所决定的特征子代数. 用 K 表示 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{k}$ 中令 $\mathfrak{k}_1$ 不变的子群. $\mathfrak{k}_1$ 的内自同构可在 $\mathfrak{k}$ 上的自然扩充，仍记为 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{k}_1$. 令 $K_0=K\cap\mathrm{Int}\,\mathfrak{k}_1$. 假定 K 和 K_0 都令一个 $\mathfrak{k}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 不变. 令 $\tilde{K},\tilde{K}_0$ 是 K,K_0 在 $\mathfrak{h}$ 上的诱导，它们都是 $\mathfrak{h}$ 上的变换群. 现在考虑商群 K/K_0 和 $\tilde{K}/\tilde{K}_0$.

(1) 如果 $\mathfrak{k}$ 的对合自同构 ρ 在 $\mathfrak{k}$ 的中心 C 上的诱导不是恒等变换，令 $C'=\{X\in C|\rho(X)=-X\}$, $C'\neq 0$.

可换群 $e^{\mathrm{ad}\,C'}\not\subseteq K_0$. 但由于 $C\subseteq\mathfrak{h}$, 所以它在 $\mathfrak{h}$ 上的诱导是恒等变换，显然不可能有 $K/K_0\approx\tilde{K}/\tilde{K}_0$. 但是在这样的情形下对于两个相配的 E. L. S. 它们事实上是同构的，而这个同构是 $e^{\mathrm{ad}\,H_0}$ 之形，见 Ⅱ.2 定理 1 的推论.

(2) 如果 ρ 在 $\mathfrak{k}$ 的中心 C 上的诱导是恒等变换.

这时候令 $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}'+C$, 则 $\mathfrak{k}_1=\mathfrak{k}_1'+C$, $\mathfrak{k}_1'$ 是 $\mathfrak{k}'$ 的特征子代数， $\mathfrak{k}'$ 是半单的. $\mathfrak{k}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'+C$, $\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{k}'$ 的 Cartan 子代数. $\mathfrak{k}_1$ 的 Cartan 子代数是 $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_0'+C$, $\mathfrak{h}_0'$ 是 $\mathfrak{k}_1'$ 的 Cartan 子代数. 令 R_0 是 K 的子群，其在 $\mathfrak{h}$ 上的诱导为恒等变换. 则易证明 $R_0=\{e^{\mathrm{ad}\,H}|H\in\mathfrak{h}_0'+C=\mathfrak{h}_0\}$. 所以

$R_0 \subseteq K_0$. 因之有

$$K/K_0 \approx (K/R_0)/(K_0/R_0) \approx \tilde{K}/\tilde{K}_0.$$

利用作者关于自同构的扩充的理论可以知道

$$\tilde{K}/\tilde{K}_0 \approx \tilde{\alpha}.$$

群 $\tilde{\alpha}$ 由下面性质定义 ([2], [3]):

(1) 它是 $\mathfrak{k}^C$ 的 Weyl 群 $W(\mathfrak{k}^C)$ 的子群;

(2) 它令 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 的角图不变,

所谓 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 的角图即是指在 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 内由 $\mathfrak{k}_1$ 的素根系 $\Pi(\mathfrak{k}_1)$ 以及表示 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}^C/\mathfrak{k}_1^C}\mathfrak{k}_1$ 的首权系所构成的图形.

因之 $\tilde{K}/\tilde{K}_0$, 所以 K/K_0 是有限群. 以 $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k})$ 或 $\tilde{\alpha}_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{k})$ 表示.

下面两个事实是显然的.

(a) $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}' + C$, 则 $\tilde{\alpha}_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{k}) = \tilde{\alpha}_{\mathfrak{k}_1'}(\mathfrak{k}')$. $\tilde{\alpha}_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{k})$ 是对 $\mathfrak{k}$ 所定的子群, $\tilde{\alpha}_{\mathfrak{k}_1'}(\mathfrak{k}')$ 是同样的.

(b) 如果 $\mathfrak{k}$ 是半单的, $\mathfrak{k} = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{k}^{(i)}$.

如果 $\rho = \sum_{i=1}^{s} \rho^{(i)}$, $\rho^{(i)}(\mathfrak{k}^{(i)}) = \mathfrak{k}^{(i)}$. 则

$$\tilde{\alpha}_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{k}) \approx \tilde{\alpha}_{\mathfrak{k}_1^{(1)}}(\mathfrak{k}^{(1)}) \times \tilde{\alpha}_{\mathfrak{k}_1^{(2)}}(\mathfrak{k}^{(2)}) \times \cdots \times \tilde{\alpha}_{\mathfrak{k}_1^{(s)}}(\mathfrak{k}^{(s)}).$$

所以一切可以化为 $\mathfrak{k}$ 是单的情形.

或者 $s = 2, \mathfrak{k} = \mathfrak{k}^{(1)} + \mathfrak{k}^{(2)}, \mathfrak{k}^{(1)} \approx \mathfrak{k}^{(2)}$ 是单的, $\rho(\mathfrak{k}^{(1)}) = \mathfrak{k}^{(2)}$. 根据 (1) 的性质易知 $\tilde{\alpha} = \{I\}$.

对于 $\mathfrak{k}$ 是单的情形, 我们将各种 $\tilde{\alpha} \neq \{I\}$ 的情形分别罗列如下 (参看本附录参考文献 [3]):

1. A_l: 根系 $\lambda_i - \lambda_j,\ i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l+1$.

1.1 $A_l^{\frac{l+1}{2}}$: $\mathfrak{k}_1 = T + A_{\frac{l-1}{2}} + A_{\frac{l-1}{2}}$.

s: $\lambda_i \to \lambda_{\frac{l-1}{2}-i},\ \lambda_{\frac{l-1}{2}-i} \to \lambda_i,\ 1 \le i \le \frac{l+1}{2}$.

1.1 $A_l^{(\frac{l+1}{2})'}$, $\mathfrak{k}_1 = D_{\frac{l+1}{2}}$. s: $\lambda_1 \to \lambda_{l+1}$; $\lambda_{l+1} \to \lambda_1$; $\lambda_i \to \lambda_i,\ i \ne 1,\ l+1$.

2. B_l: 根系 $\lambda_i \pm \lambda_j,\ \pm\lambda_i,\ i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l$.

s: $\lambda_1 \to -\lambda_1$; $\lambda_i \to \lambda_i,\ i \ne 1$.

3. C_l: 根系 $\pm\lambda_i \pm \lambda_j,\ \pm 2\lambda_i,\ i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l$.

C_l^l $(C_l^{\frac{l}{2}})$, $\mathfrak{k}_1 = T + A_{l-1}$ $(\mathfrak{k}_1 = C_{\frac{l}{2}} + C_{\frac{l}{2}})$.

s: $\lambda_i \to -\lambda_{l-i+1},\ 1 \le i \le l$.

4. D_l: 根系 $\pm\lambda_i \pm \lambda_j,\ i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l$.

4.1 D_l^i $(i \ne \frac{l}{2},\ l,\ l-1)$, $\mathfrak{k}_1 = D_i + D_{l-2}$.

s: $\lambda_1 \to -\lambda_1$; $\lambda_l \to -\lambda_l$; $\lambda_i \to \lambda_i,\ i \ne 1,\ l$.

4.2 D_{2k}^{2k-1}, $\mathfrak{k}_1 = T + A_{2k-1}$.

s: $\lambda_1 \to \lambda_l$; $\lambda_l \to \lambda_1$; $\lambda_i \to \lambda_{l-i+1},\ i \ne 1,\ l$.

4.3 D_{2k}^{2k}, $\mathfrak{k}_1 = T + A_{2k-1}$.

s: $\lambda_i \to \lambda_{l-i+1},\ 1 \le i \le l$.

4.4 $D_l^{\frac{l}{2}}$.

s_1: $\lambda_i \to -\lambda_{l-i+1},\ 1 \le i \le l$;

s_2: $\lambda_1 \to -\lambda_1$; $\lambda_l \to -\lambda_l$; $\lambda_i \to \lambda_i$; $i \ne l$;

$\tilde{\alpha} = \{I,\ s_1,\ s_2,\ s_1 s_2\}$.

4.5 $D_l^{(\frac{l+1}{2})'}$, $\mathfrak{k}_1 = B_{\frac{l-1}{2}} + B_{\frac{l-1}{2}}$.

s: $\lambda_i \to -\lambda_{l-i},\ 1 \le i \le l-1$.

5. E_7: 根系 $\lambda_i - \lambda_j,\ \pm(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l),\ i, j, k, l = 1,\ 2,\ \ldots,\ 8$.

E_7^1 (E_7^7), $\mathfrak{k}_1 = E_6 + T$ (A_7).

s: $\lambda_i \to -\lambda_{9-i}$, $1 \le i \le 8$.

最后指出 A_1^1 即 $\mathfrak{k} = A_1$, 而 $\mathfrak{k}_1 = T$. 这时候 s: $\lambda \to -\lambda$.

上面 T 表示一维可换李代数.

Ⅱ.4 主要结果

本节仍然利用 Ⅱ.2, Ⅱ.3 的符号. 由于 Ⅱ.2 定理 2 和定理 1 的推论, 我们只要讨论下面的情形即可.

(1) $\mathfrak{g}$ 是第一类的单李代数,

(2) ρ 令 $\mathfrak{k}$ 的中心 C 的元素都不变.

由于这样的假设可以假定 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ 所定的对合自同构

$$t = e^{\operatorname{ad} H_0}, \tag{Ⅱ.4.1}$$

$H_0 \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{k}$ 的共同的 Cartan 子代数. ρ 由 (Ⅱ.2.1) 所定义, 而且 $\mathfrak{h}_0 \supseteq C_0$.

令 $\{X_\alpha | \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}^C)\}$ 是 $\mathfrak{g}^C$ 对于 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}^C$ 的一组 Weyl 基. 因为 σ 和 γ (γ 是两个相配 E. L. S. 的同构对应. 由 Ⅱ.1 的讨论它令 $\mathfrak{h}$ 不变) 都令 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}_0$ 不变, 所以有

$$\begin{cases} \gamma(X_\alpha) = \nu_\alpha X_{\gamma(\alpha)} \\ \sigma(X_\alpha) = \tau e^{\operatorname{ad} H} X_\alpha = e^{2\pi(H,\alpha)} \tau_{alpha} X_{\tau(\alpha)}. \end{cases} \tag{Ⅱ.4.2}$$

对 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}^C)$ 成立, 这里 σ 表示 ρ 的任一对合扩充.

令 β 是表示 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}^C}\mathfrak{k}$ 的任一个属于 $\mathfrak{h}_0$ 的权. 这样的权是存在的, 因为 ρ 由于 (2) 令 $\mathfrak{h}$ 上的次序不变, [1] 所以它将 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}^C}\mathfrak{k}$

[1] 这里更明确的证明是: 因为 $\operatorname{ad}|\mathfrak{p}^C\mathfrak{k}$ 最多只可能有两个分支, 由于 $0 < (\lambda, H) = (\rho(\lambda), \rho(H)) = (\rho(\lambda), H)$ 对任何 $H \in C$ 成立, 所以 $\rho(\lambda)$ 属于首权为 λ 的那个分支, 因此 $\rho(\lambda) = \lambda - \sum \alpha_i$, $\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k})$ 于是 $\lambda = \rho^{-1}(\lambda) - \sum \rho^{-1}(\alpha_i) \le \rho^{-1}(\lambda)$ 矛盾.

的最高权仍对应最高权，也即是说如 λ 是最高权，则 $\rho(\lambda)=\lambda$. 即，$\tau(\lambda)=\lambda$. 因为 $\beta\in\mathfrak{h}_0$, 所以从 (Ⅱ.4.2) 知 X_β 是 σ 的一个特征向量，所以 $X_\beta\in\mathfrak{p}_1^C$ 或者 $\mathfrak{p}_{-1}^C$ ($\mathfrak{p}_{\pm1}$ 的定义见 (Ⅱ.2.2)).

由于 $X_\beta\in\mathfrak{p}_1^C$ (或者 $\mathfrak{p}_{-1}^C$), 则 $\gamma(X_\beta)$ 属于 $\gamma(\mathfrak{p}_1^C)=\mathfrak{p}_{-1}^C$ (或者 $\gamma(\mathfrak{p}_1^C)$).

$$\sigma(X_{\gamma(\beta)})=\tau e^{\operatorname{ad}H}X_{\tau(\beta)}=e^{2\pi i(H,\ \gamma(\beta))}\tau_{\gamma(\beta)}X_{\gamma(\beta)}.$$

利用 (Ⅱ.4.2) 就有

$$e^{2\pi i(H,\ \beta-\gamma(\beta))}\tau_\beta=-\tau_{\gamma(\beta)}. \qquad (Ⅱ.4.3)$$

利用下面的引理知 $\tau_\beta=\tau_{\gamma(\beta)}$, 所以得到

$$(H,\ \beta-\gamma(\beta))\equiv\frac{1}{2}\,(\operatorname{mod}1). \qquad (Ⅱ.4.4)$$

由于 γ 的定义知它在 $\mathfrak{h}$ 上的诱导 s 属于 §3 中定义的群 K. 如果 $\gamma\in\operatorname{Int}\mathfrak{k}_1$, 则由于

$$[\mathfrak{k}_1,\ \mathfrak{p}_1]\subseteq\mathfrak{p}_1,\quad [\mathfrak{k}_1,\ \mathfrak{p}_{-1}]\subseteq\mathfrak{p}_{-1},$$

所以 γ 令 $\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_{-1}$ 都不变. 因此我们可以肯定 $\gamma\in K/K_0$ 而且 $s\neq I$. 利用 §3 的结果知 γ 在 $\mathfrak{h}$ 上的诱导 $s\in\tilde{\alpha}$. 所以有下面的事实.

两个相配 E. L. S. 共轭的必要条件是存在一个 $s\in\tilde{\alpha}_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{k})$ 使得对于 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}^C}(\mathfrak{k})$ 的一个最高权 β 有

$$(H,\ \beta-s(\beta))\equiv\frac{1}{2}\,(\operatorname{mod}1) \qquad (Ⅱ.4.5)$$

成立.

为了证明 $\tau_\beta = \tau_{\gamma(\beta)}$，我们先考虑 $\mathfrak{g}$ 是第一型单李代数．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ 是一个 Cartan 分解．这样 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{g}$ 有同一的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$．由 (Ⅱ.2.1) 所定义的 $\rho = \tau e^{\mathrm{ad}\, H}$ 中的 τ 我们称它为正则的 G- 自同构．这意味着 τ 令 $\mathfrak{k}$ 的一组素根系 $\Pi(\mathfrak{k}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ 不变，而且对于 $\mathfrak{k}$ 的 Weyl 基 X_α 有

$$\tau(X_{\alpha_i}) = X_{\tau(\alpha_i)}, \quad \alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k}) \tag{Ⅱ.4.6}$$

成立．

由于我们讨论的 ρ 令 $\mathfrak{k}$ 的中心的元素不变，所以也假定 ρ 令 $\mathfrak{k}$ 的中心内的元素都不变，这就易知 $\tau(\lambda) = \lambda$．

假定 τ 是可扩充的，仍以 τ 表示它的扩充．由于 τ 令 $\mathfrak{h}$ 不变所以对于任何 $\mathfrak{g}^C$ 的根 α 如果 $\tau(\alpha) = \alpha$ 则有

$$\tau(X_\alpha) = \tau_\alpha X_\alpha.$$

定义一个紧致李代数 $\mathfrak{k}$ 的一个不可约表示的权是边界的，如果它和这个表示的首权可以用 $\mathfrak{k}$ 的 Weyl 群内的元素互变．所以边界权在 Weyl 群下共轭．称一个不可约表示是简单的，如果所有的权都是边界的．

有了这些预备，我们证明下面引理．

引理 令 $\mathfrak{g}$ 是一个第一型的单李代数，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ 是它的 Cartan 分解，τ 是 $\mathfrak{k}$ 的一个可扩充的正则 G- 自同构．假定对于任何 $\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k})$ 而且 $\tau(\alpha_i) \neq \alpha_i$，则恒有 $(\tau(\alpha_i), \alpha_i) = 0$，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}^C}\mathfrak{k}$ 的任一个分支是简单的．如果 β 是分支的首权为 λ 的任一个权，而且 $\tau(\beta) = \beta$，则 $\tau_\beta = \tau_\lambda$．

证 令 Σ 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}^C}\mathfrak{k}$ 的以最高权为 λ 的一个分支的权系，$\beta \in \Sigma$ 为首权的充分必要条件是对所有 $\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k})$ 都有

$$(\beta, \alpha_i) \geq 0.$$

要证明的是充分性. 如果 β 不是首权, 由于简单性知存在一个 $s \in W(\mathfrak{k})$ 使得 $s(\lambda)=\beta$. 如果 β 对任何 $\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k})$ 都有 $(\beta,\ \alpha_i) \geq 0$, 且对所有的 α_i 有 $(s(\lambda),\ \alpha_i) \geq 0$. 由表示论的基本定理, 存在一个 $\mathfrak{k}$ 的表示 ρ_0 以 $s(\lambda)$ 为首权. 因此 $s^{-1}s(\lambda)$ 是 ρ_0 的权, 所以 $\lambda = s^{-1}s(\lambda) \leq s(\lambda) = \beta$. 这与 λ 为首权矛盾.

现在令 $\beta \in \Sigma$, 而且 $\tau(\beta)=\beta$. 如 β 不是首权 λ, 则至少有一个 $\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k})$ 使得 $(\beta,\ \alpha_i)<0$. 这就有 $\beta+\alpha_i \in \Sigma$.

(1) 如果 $\tau(\alpha_i)=\alpha_i$, 则由于 $\tau_{\alpha_i}=1$, 有 (利用 τ 是 $\mathfrak{g}^C$ 的自同构)

$$\tau_{\beta+\alpha_i} = \tau_\beta \tau_{\alpha_i} \frac{N_{\tau(\beta+\alpha_i),\,\tau(\alpha_i)}}{N_{\beta+\alpha_i,\,\alpha_i}} = \tau_\beta. \tag{II.4.7}$$

(2) 如果 $\tau(\alpha_i)=\alpha_i^* \neq \alpha_i,\ \alpha_i^* \in \Pi(\mathfrak{k})$, 由于 $(\alpha_i^*,\ \alpha_i)=0$, 所以

$$(\beta+\alpha_i,\ \alpha_i^*) = (\beta,\ \alpha_i^*) < 0.$$

因之知 $\beta+\alpha_i+\alpha_i^* \in \Sigma$.

利用关系

$$\begin{cases} \tau_{\beta+\alpha_i+\alpha_i^*} = \tau_{\beta+\alpha_i}\tau_{\alpha_i^*}\dfrac{N_{\beta+\alpha_i^*,\,\alpha_i}}{N_{\beta+\alpha_i,\,\alpha_i^*}}, \\ \tau_{\beta+\alpha_i} = \tau_\beta\tau_{\alpha_i}\dfrac{N_{\beta,\,\alpha_i^*}}{N_{\beta,\,\alpha_i}}. \end{cases} \tag{II.4.7$'$}$$

并利用 Jacobi 恒等式

$$[X_\beta,\ [X_{\alpha_i},\ X_{\alpha_i^*}]] = [[X_\beta,\ X_{\alpha_i}],\ X_{\alpha_i^*}] + [X_{\alpha_i},\ [X_\beta,\ X_{\alpha_i^*}]],$$

因为 $(\alpha_i,\ \alpha_i^*)=0$, 所以 $[X_{\alpha_i},\ X_{\alpha_i^*}]=0$, 于是从上式即知

$$N_{\beta,\,\alpha_i} N\beta+\alpha_i,\, \alpha_i^* = N\beta,\, \alpha_i^* N\beta+\alpha_i^*,\, \alpha_i.$$

代入 (Ⅱ.4.7′), 利用 $\tau_{\alpha_i} = \tau_{\alpha_i^*} = 1$ 即得

$$\tau_{\beta+\alpha_i+\alpha_i^*} = \tau_\beta.$$

利用归纳法即知对于任何 $\beta \in \Sigma$ 我们可以求得 $\delta \in \Sigma$, $\tau_\delta = \tau_\beta$ 而且 $(\delta, \alpha_i) \geq 0$ 对 $\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k})$ 成立. 由于简单性, 所以从证明开始的命题即知 δ 是首权 λ, 于是有 $\tau_\lambda = \tau_\beta$. 引理得证. □

推论 如果 $\mathfrak{k}$ 分解为两个理想 $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \dot{+} \mathfrak{k}_2$, 表示 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}^C}\mathfrak{k}$ 的一个分支可以看作是 $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ 的两个表示 ρ_1, ρ_2 的 $\times$ 乘积. [1] 如果 τ 令 $\mathfrak{k}_i$ 的素根系都不变, 则引理仍能成立, 如果 ρ_2 是 $\mathfrak{k}$ 的一个简单表示 (其它条件不变).

证 因为任一个 $\beta \in \Sigma$ 可写作 $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_1 \in \Sigma(\rho_1)$, $\beta_2 \in \Sigma(\rho_2)$, $\Sigma(\rho_i)$ 表示 ρ_i 的权系. 对 β_2 即得到 $\tau_\beta = \tau\beta_1 + \lambda_2$, λ_2 是 ρ 的首权. 然后再对 $\Sigma(\rho_1)$ 利用 (Ⅱ.4.7). 我们知道 $\Sigma(\rho)$ 的首权可以从 β_1 逐次加以 $\mathfrak{k}_1$ 的素根 α_i 而得到. 这些 $\alpha_i = \alpha_i^*$. (Ⅱ.4.7) 恒成立. □

要证明条件 (Ⅱ.4.5) 的必要性, 即证明 (Ⅱ.4.3) 中, 也即是要对个别的单李代数分别验算推论及引理中的条件满足. 这是很容易做到的.

由于上面的讨论, 我们有下面定理.

定理 4 如果 $\mathfrak{g}$ 是第一类型的单李代数. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ 是它的 Cartan 分解. $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{k}$ 的共同的 Cartan 子代数. $\rho = \tau e^{\mathrm{ad}\,H}$ 是 $\mathfrak{k}$ 的一个 G- 自同构并且是可以扩充的. 令 $\mathfrak{k}_1$ 是 $\mathfrak{k}$ 中由 ρ 所定的特征子代数, $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k})$ 是对称空间 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 的 $\tilde{\alpha}$ 群. β 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}^C}\mathfrak{k}$ 中的最高权. 于是由 ρ 所定义的两个相配 E. L. S.

---

[1] $\rho = \rho_1 \times \rho_2$. 令 ρ_i' 是 $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \dot{+} \mathfrak{k}_2$ 的表示 $\rho_i'(X_i) = \rho_i(X_i)$, $\rho_i(X_j) = 0$, $j \neq i$. 则 ρ 定义为 $\rho_1' \otimes \rho_2'$, $\otimes$ 表示 Kronecker 乘积.

同构的充分必要条件是存在一个 $s \in \tilde{\alpha}(\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1)$ 使得

$$(s(\beta)-\beta,\ H) \equiv \frac{1}{2}\,(\mathrm{mod}\,1) \qquad (\text{II}.4.8)$$

成立.

证 必要性已经证明. 现在证明充分性.

由于 s 可以扩充为 $\mathfrak{k}$ 的一个内自同构 γ, 它令 $\mathfrak{k}$ 不变. 仍以 γ 表示它在 $\mathfrak{g}$ 上的自然扩充, 所以 $\gamma\rho=\rho\gamma$. 令 σ 是 ρ 的任一扩充且是对合的. 则 $\gamma\sigma\gamma^{-1}$ 和 σ 都是 ρ 的对合扩充. 而且由于 ρ 令 $\mathfrak{k}$ 的中心 C 内元素不变, 所以从定理 1 的证明知 $\gamma\sigma\gamma^{-1}=\sigma$ 或 $\gamma\sigma\gamma^{-1}=\sigma\cdot t$. 如果第一种情形成立, 则 $\gamma(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_1$. 但是由于 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{k}_1+\mathfrak{p}_1$, 而且 γ 令 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{p}$ 不变, 所以 $\gamma(\mathfrak{k}_1)=\mathfrak{k}_1, \gamma(\mathfrak{p}_1)=\mathfrak{p}_1$. 但是由于 (II.4.8) 及引理, 假如 $X_\beta \in \mathfrak{p}_1^C$, 则 $\gamma(X_\beta)=\nu_\beta X_{s(\beta)}$ 只能属于 $\mathfrak{p}_{-1}$, 这与 $\gamma(\mathfrak{p}_1)=\mathfrak{p}_1$ 相矛盾. 如果 $X_\beta\in\mathfrak{p}_{-1}$ 证法也一样. 于是只有第二种情形是可能的, 即, $\gamma\sigma\gamma^{-1}=\sigma\cdot t$. 这就意味着 $\mathfrak{g}_1\sim\mathfrak{g}_{-1}$. 定理证毕. □

结论 令 $\mathfrak{g}$ 是一个单李代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ 是 Cartan 分解. 如果 $\rho e^{\mathrm{ad}\,H}$ 是 $\mathfrak{k}$ 的一个对合 G- 自同构, $\mathfrak{k}_1$ 是 ρ 所定的的特征子代数, $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k})$ 是 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1$ 的 $\tilde{\alpha}$ 群.

(1) 如果 $\mathfrak{g}$ 是第二类型的, 则相配 E. L. S. 不同构.

(2) 如果 $\mathfrak{g}$ 是第一类型的, ρ 不令 $\mathfrak{k}$ 的中心元素不变, $\rho(Z)=-Z, C\in C$, 则相配 E. L. S. 同构.

(3) 如果 $\mathfrak{g}$ 是第一类型的, ρ 令 $\mathfrak{k}$ 的中心元素不变, 即 $\rho(Z)=Z$ 对 $Z\in C$ 成立. 则存在 $s\in\tilde{\alpha}(\mathfrak{k})$ 使得

$$(s(\beta)-\beta,\ H) \equiv \frac{1}{2}\,(\mathrm{mod}\,1)$$

成立是相配 E. L. S. 同构的充分必要条件, 式中 β 是表示 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}c\mathfrak{k}$ 的最高权. □

推论 1 若 $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k})=\{I\}$, 则相配 E. L. S. 不共轭.

推论 2 若 $H=0$, 则相配 E. L. S. 不共轭.

Ⅱ.5 正规子代数的共轭

正规子代数是一类子代数, 它与原子代数有同样的所谓 T-正常的 Cartan 子代数. 在这里专讨论 $\mathfrak{g}$ 是第一类型的单李代数. 于是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ 中, $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{g}$ 有同样的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$. 这个 $\mathfrak{h}$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的 T- 正常 Cartan 子代数. 所有的正规子代数 $\tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{z}(Z(\tilde{\mathfrak{g}}))$, 式中 $Z(\tilde{\mathfrak{g}})$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的中心, $\mathfrak{z}$ 是 $Z(\tilde{\mathfrak{g}})$ 的中心化子. [1] 它们的定义见本附录参考文献 [5]. 在那里我们得出两个正规子代数 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$ 共轭的充分必要条件是存在一个 $s\in W(\mathfrak{k})$ 使得

$$s(Z(\mathfrak{g}_1))=Z(\mathfrak{g}_2). \qquad (\text{Ⅱ}.5.1)$$

利用这个结果于对称空间, 令 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 分别由两个 $\mathfrak{g}$ 的令 $\mathfrak{k}$ 不变的内自同构 $\sigma_1=e^{\operatorname{ad}H_1}$, $\sigma_2=e^{\operatorname{ad}H_2}$, H_1, $H_2\in\mathfrak{h}$ 所定义. σ_1,σ_2 是对合的. 如果 $\mathfrak{g}_1\sim\mathfrak{g}_2$ 则由前面的说明知存在一个 $s\in W(\mathfrak{k})$ 使得 $s(H_1)\in Z(\mathfrak{g}_2)$, 于是 $\mathfrak{z}(s(H_1))\supseteq\mathfrak{g}_2$. 但是 $\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的最大子代数, 所以必须有 $\mathfrak{z}(s(H_1))=\mathfrak{g}_2$. 这就有 $e^{\operatorname{ad}s(H_1)}$, $e^{\operatorname{ad}H_2}$ 它们都是对合的, 并且在 $\mathfrak{g}$ 内有相同的不动点. 利用下面的引理得 $e^{\operatorname{ad}s(H_1)}=e^{\operatorname{ad}H_2}$, 这就有

$$s(H_1)-H_2\in\Gamma(\mathfrak{g}) \qquad (\text{Ⅱ}.5.2)$$

$\Gamma(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的格, 即所有的 $H\in\mathfrak{h}$ 而且 $e^{\operatorname{ad}H}=I$ 的点所成的群. 反之, 如果 (5.2) 成立, 则 $e^{\operatorname{ad}s(H_1)}=e^{\operatorname{ad}H_2}$. 于是它们所

[1] $Z(\tilde{\mathfrak{g}})$ 的中心化子是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的合于 $e^{\operatorname{ad}Z(\tilde{\mathfrak{g}})}X=X$ 的子空间.

定的特征子代数 $\mathfrak{g}_2$ 和 $\gamma(\mathfrak{g}_1)$ 相同，即 $\mathfrak{g}_1 \sim \mathfrak{g}_2, \gamma$ 是 s 扩充为 $\mathfrak{k}$ 的内自同构在 $\mathfrak{g}$ 上的自然扩充.

引理 σ_1, σ_2 是 $\mathfrak{g}$ 的两个对合自同构. 如果它们的特征子代数 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$, 则 $\sigma_1 = \sigma_2$.

证 σ_1 将 $\mathfrak{g}$ 分为直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1$ 是对应 $+1$ 的特征子空间，$\mathfrak{g}_{-1}$ 对应 -1. 令 $X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_{-1}$, 则 $(\sigma_1(X),\ \sigma_1(Y)) = (X,\ Y)$ 由此得 $(-X,\ Y) = (X,\ Y)$. 所以 $(X,\ Y) = 0$, 即 $(\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_{-1}) = 0$. 可知 $\mathfrak{g}_{-1}$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的正交补. 而且 $\mathfrak{g}_1$ 是非退化的子空间. 所以 $\mathfrak{g}_{-1}$ 由 $\mathfrak{g}_1$ 所唯一确定. 于是对于 σ_2 也有同样的分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_{-1}$ 所以 $\sigma_1 = \sigma_2$. □

现证条件 (Ⅱ.5.2) 和 (Ⅱ.4.8) 等价. 令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ 所定的对合自同构

$$t = e^{\mathrm{ad}\, H_0},\ h_0 \in \mathfrak{h}. \tag{Ⅱ.5.3}$$

令 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_l\} = \Pi$ 是 $\mathfrak{g}^C$ 的素根系. 从单李代数的结构知 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_l$ 中只有一个令为 α_1 使得

$$(H_0,\ \alpha_1) = \frac{1}{2}. \tag{Ⅱ.5.4}$$

而其它的 α_i 有 $(H,\ \alpha_i) = 0$.

条件 (Ⅱ.5.2) 表示为对于任何 $\alpha_i \in \Pi$ 有

$$(s(H) - H - H_0,\ \alpha_i) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 1),\ 1 \leq i \leq l. \tag{Ⅱ.5.5}$$

令 α_i 为 $\alpha_1, -\alpha_1 = \beta$ 所以 (5.5) 对 $\alpha_i = \alpha_1$ 时为

$$(s(H) - H,\ \alpha_1) \equiv \frac{1}{2} \,(\mathrm{mod}\, 1),$$

即

$$(H,\ s(\beta) - \beta) \equiv \frac{1}{2} \,(\mathrm{mod}\, 1).$$

此即条件 (Ⅱ.4.8). 要证明 (Ⅱ.4.8) 和 (Ⅱ.5.2) 等价, 只须证明 (Ⅱ.5.5) 中当 $i > 1$ 时恒成立. 这是因为 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 是相配的. 所以在 $\mathfrak{k}$ 内 σ 和 σt 的特征子代数 $\mathfrak{k}_1$ 是一致的. $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(H) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(s(H))$, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(H)$ 表示 H 在 $\mathfrak{k}$ 内的中心化子 (定义见 [5]). $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(H)$ 的素根系是 $\Pi(\mathfrak{k})$ 的子系

$$\Pi' = \{\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k}) | (H,\ \alpha_i) \equiv 0 \pmod 1\}.$$

因 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(H) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(s(H))$, 故若 $(H,\ \alpha_i) \equiv 0$, 则 $(s(H),\ \alpha_i) \equiv 0$, 反之亦然. 但 $e^{\mathrm{ad}\, H}$, $e^{\mathrm{ad}\, s(H)}$ 是对合的, 所以 $(H,\ \alpha_i) \equiv 0$ 或 $(H,\ \alpha_i) \equiv 1/2$, 对于 $\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k})$. 因此 $(H,\ \alpha_i)$ 和 $(s(H),\ \alpha_i)$ 对 $\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k})$ 同为零或 1/2, 这样对 $\forall \alpha_i \in \Pi(\mathfrak{k})$, 有

$$(s(H) - H,\ \alpha_i) \equiv 0 \pmod 1).$$

由李代数的结构知

$$\Pi(\mathfrak{k}) = \{\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_l\},$$

或者

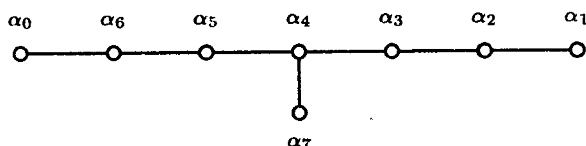
$$\Pi(\mathfrak{k}) = \{\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_l,\ \alpha_0\},$$

α_0 是最小根. 所以特别的对于任何 $\alpha_i \in \Pi$, $i > 1$ 时 (Ⅱ.5.5) 恒成立. 这就看出 (Ⅱ.4.8) 是相配 E. L. S. 同构的充分必要条件. s 可以选取在 $\tilde{\alpha}$ 中显然.

Ⅱ.6 例子

这里取 E_7 的各种 E. L. S. 作为例子. 这里的记号参看 [2].

< A > $\mathfrak{k} = A_7$, $\beta = \alpha_7$, $\Pi(A_7) = (\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_6)$.



$$\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 = 0. \quad (\text{II}.6.1)$$

令

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 6;$$
$$\alpha_0 = \lambda_7 - \lambda_8;$$
$$\alpha_7 = \sum_{j=5}^{8} \lambda_j.$$

1. $\rho = \tau e^{\mathrm{ad}\, H}$, $\tau \neq I$. A_7 的外自同构对产生的特征子代数有

1.1. $\mathfrak{k}_1 = C_4$. 相配的 E. L. S. 不同构 (见 II.4. 推论 2).

1.2. $\mathfrak{k}_1 = D_4$. 这时 $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k}) = \{s, I\}$.

$$s: \lambda_1 \to \lambda_8; \ \lambda_8 \to \lambda_1; \ \lambda_i \to \lambda_i, \ i \neq 1, 8.$$

取 $\beta = \alpha_7$, 于是

$$s(\beta) = \lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7,$$
$$s(\beta) - \beta = \lambda_1 - \lambda_8 = \sum_{j=0}^{6} \alpha_j.$$

但是 $(H, \alpha_4) = 1/2$. 所以

$$(s(\beta) - \beta, \ H) = (H, \ \alpha_4) = \frac{1}{2}.$$

从定理知相配 E. L. S. 同构.

2. $\tau = I$, $\rho = e^{\mathrm{ad}\, H}$.

2.1. $\mathfrak{k}_1 = T + A_1 + A_5$. 此时 $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k}) = I$. 所以相配 E. L. S. 不同构 (见 Ⅱ.4. 推论 1).

2.2. $\mathfrak{k}_1 = T + A_3 + A_3$. 这时 $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k}) = \{s, I\}$.

$$s: \lambda_1 \to \lambda_5;\ \lambda_2 \to \lambda_6;\ \lambda_3 \to \lambda_7;\ \lambda_4 \to \lambda_8;\ \ldots.$$

取 $-\beta = \alpha_7$.

$$s(\beta) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -\beta,$$

于是

$$s(\beta) - \beta = 2\beta = -2\alpha_7.$$

因为 $(H, \alpha_4) = \frac{1}{2}$, 所以从 (Ⅱ.6.1) 有

$$4(H, \alpha_4) + 2(H, \alpha_7) = 0.$$

因之 $(H, \alpha_7) = 0$. 条件 (4.8) 不合, 于是相配 E. L. S. 不同构.

< B > $\mathfrak{k} = T + E_6$, $\beta = \alpha_0$ 或 α_1, $\Pi(T + E_6) = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$.

1. $\tau \neq I$. 对应于 E_6 的两个对称空间.

1.1. $\mathfrak{k}_1 = F_4$.

1.2. $\mathfrak{k}_1 = C_4$.

τ 将 $\mathfrak{k}$ 的中心元素 Z 变为 $-Z$. 所以上面各对应一个共轭类, 即相配 E. L. S. 同构.

2. $\tau = I$.

2.1. $\mathfrak{k}_1 = T + T + D_5$.

2.2 $\mathfrak{k}_1 = A_1 + T + A_5$.

由于 $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k}) = I$, 所以它们的相配 E. L. S. 不共轭.

<C> $\mathfrak{k} = A_1 + D_6$, $\beta = \alpha_2$, $\Pi(A_1 + D_6) = \{\alpha_k | 0 \le k \le 7, k \ne 2\}$.

1.1. $\mathfrak{k}_1 = D_5 + T + T$.

1.2. $\mathfrak{k}_1 = A_5 + T + T$.

1.3. $\mathfrak{k}_1 = A_3 + A_3 + T$.

1.4. $\mathfrak{k}_1 = D_4 + A_1 + A_1 + A_1$.

1.5. $\mathfrak{k}_1 = A_5 + T + A_1$.

令 $\alpha_0 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\alpha_6 = \lambda_2 - \lambda_3$, $\alpha_5 = \lambda_3 - \lambda_4$, $\alpha_4 = \lambda_1 - \lambda_5$, $\alpha_3 = \lambda_5 - \lambda_6$, $\alpha_7 = \lambda_5 + \lambda_6$, $\alpha_1 = -2\lambda$, $\alpha_2 = \lambda - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6)$.

对于 1.1. — 1.3. $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k})$ 的分解为直积中有因子 $\tilde{\alpha}(A_1)$: $s: \lambda \to -\lambda$. 令 $\beta = \alpha_2$, 于是 $s(\beta) = -\lambda - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6)$, $s(\beta) - \beta = -2\lambda$.

$$(H,\ s(\beta) - \beta) \equiv \frac{1}{2}.$$

所以都对应一个共轭类.

余下来的只要讨论 1.4. 和 1.5.

1.4. $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k}) = \{I,\ s\}$,

$$s:\ \lambda_j \to -\lambda_j,\quad j = 1, 6;$$
$$\lambda_i \to \lambda_i,\quad i \ne 1, 6.$$

于是

$$s(\beta) = \lambda - \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6),$$
$$s(\beta) - \beta = \lambda_1 - \lambda_6 = \alpha_0 + \alpha_6 + \alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3,$$
$$(s(\beta) - \beta,\ H) = (H,\ \alpha_4) = \frac{1}{2}.$$

所以相配 E. L. S. 共轭.

1.5. $\tilde{\alpha}(\mathfrak{k})=\{I,\ s\}$,

$$\begin{aligned} s:\ &\lambda_1\to-\lambda_6,\quad \lambda_6\to-\lambda_1,\\ &\lambda_2\to-\lambda_5,\quad \lambda_5\to-\lambda_2,\\ &\lambda_3\to-\lambda_4,\quad \lambda_4\to-\lambda_3. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &s(\beta)=\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6),\\ &s(\beta)-\beta=\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &(H,\ \lambda_1+\lambda_2)=(H,\ \lambda_5+\lambda_6)=\frac{1}{2},\\ &(H,\ \lambda_i-\lambda_{i+1})=0,\ 1\le i\le 5. \end{aligned}$$

所以有 $(H,\ \lambda_i)=1/4,\ 1\le i\le 6$. 于是 $(s(\beta)-\beta,\ H)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,1)$. 因此相配 E. L. S. 不共轭.

附录 II 参考文献

[1] Berger, M., *Sur les espaces symétriques non-compacts*, Ann. Sci. École. Norm. Sup. **74**(1957), 85-177.

[2] 严志达, 李群与微分几何, 1960, 人民教育出版社.

[3] 严志达, 实半单纯 Lie 代数的拟自同构, 数学学报, **14**(1964), 387-391.

[4] 严志达, Sur les espaces symmetriques non-compacts, Scientia Sinica, **XIV** (1965), 31-38.

[5] 严志达, 论半单 Lie 代数的正规子代数.

附录 Ⅲ Cartan 子代数，Weyl 群和非 Riemann 局部对称空间

梁 科

Ⅲ.1 Cayley 变换与实半单李代数的 Cartan 子代数分类

在第二章中，讨论了 Cartan 子代数共轭的一些性质. 为了讨论 Cartan 子代数的共轭分类，我们需要一些更精细的结果. 为此首先引进实约化李代数的概念.

定义 1.1 设 $\mathfrak{r}$ 是实李代数，若 $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ 为半单李代数并且 $\mathfrak{r} = \mathfrak{z}(\mathfrak{r})+[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$, , 则称 $\mathfrak{r}$ 为实约化李代数.

类似第二章定义，可以定义实约化李代数的 Cartan 子代数. 这样实约化李代数的任何 Cartan 子代数均包含其中心. 于是我们很容易将第二章有关 Cartan 子代数的结论推广到约化子代数上. 在以后讨论约化子代数时，我们将不加证明地引用有关结论.

引理 1.2 设 $\mathfrak{h}$ 是实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. Δ 为 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}^C$ 的根系的一个子根系，若 Δ 满足

(1) $\bar{\Delta} = \Delta$ ($^-$ 表示 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{g}_0$ 的复共轭),

(2) $\tau(\Delta) = \Delta$,

则

$$\mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{h}^C + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$$

是实约化李代数，而 τ 在其上限制为其 Cartan 对合，记作 t.

证 易证，略. □

取定实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 及其 $T-$ 正则 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0$. 在以后的章节中 $\mathfrak{h}$ 恒表示 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数，且总假定 $\mathfrak{h}$ 有正则分解 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^+\dot{+}\mathfrak{h}^-$, 使 $\mathfrak{h}^+\subset\mathfrak{h}_0^+$, $\mathfrak{h}_0^-\subset\mathfrak{h}^-$. $\Sigma(\mathfrak{h})$, $\Sigma^+(\mathfrak{h})$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}^C$ 的根系与正根系. 特别记 $\Sigma(\mathfrak{h}_0)$, $\Sigma^+(\mathfrak{h}_0)$ 分别为 Σ, Σ^+.

以下恒假定 G 是 $\mathfrak{g}_0$ 的内自同构群， K 为李代数为 $\mathfrak{k}_0$ 的连通解析子群，即 $K=\{e^{\mathrm{ad}\,x}|x\in\mathfrak{k}_0\}$.

引理 1.3 设 $\mathfrak{g}\in G$, $g\mathfrak{h}=\mathfrak{h}$, 则存在 $k\in K$, 使 $k(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ 且 $g|_{\mathfrak{h}}=k|_{\mathfrak{h}}$.

证 由极分解定理， g 可分解为 $g=kp$, $k\in K$, $p=e^{\mathrm{ad}\,x}$, $x\in\mathfrak{p}$. 如果我们证明了 $p(h)=h$, , 对于 $h\in\mathfrak{h}$, 那么 k 便是引理所要求的了. 现在来证明这一点. 由定义

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{ad}\,x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{ad}\,x)^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{ad}\,x)^{2n}}{(2n!)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{ad}\,x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}c=\cosh\mathrm{ad}\,x=\frac{e^{\mathrm{ad}\,x}+e^{-\mathrm{ad}\,x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{ad}\,x)^{2n}}{(2n)!},\\ s=\sinh\mathrm{ad}\,x=\frac{e^{\mathrm{ad}\,x}-e^{-\mathrm{ad}\,x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{ad}\,x)^{2n+1}}{(2n+1)!},\end{aligned}$$

即 $e^{\mathrm{ad}\,x}=c+s$. 因为 $x\in\mathfrak{p}$, 所以 $(adx)^{2n}\mathfrak{h}^+\subset\mathfrak{k}_0$, $(\mathrm{ad}\,x)^{2n+1}\mathfrak{h}^+\subset\mathfrak{p}_0$, $(\mathrm{ad}\,x)^{2n}\mathfrak{h}^-\subset\mathfrak{p}_0$, $(\mathrm{ad}\,x)^{2n+1}\mathfrak{h}^-\subset\mathfrak{k}_0$.

因此 $c\mathfrak{h}^+\subset\mathfrak{k}_0$, $c\mathfrak{h}^-\subset\mathfrak{p}_0$, $s\mathfrak{h}^+\subset\mathfrak{p}_0$, $s\mathfrak{h}^-\in\mathfrak{k}_0$. 由第二章有

关定理, $g(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ 当且仅当 $g(\mathfrak{h}^{\pm})=\mathfrak{h}^{\pm}$. 于是

$$p\mathfrak{h}^{+}=k^{-1}\mathfrak{h}^{+}\subset\mathfrak{k}_0,\quad p\mathfrak{h}^{-}=k^{-1}\mathfrak{h}^{-}\subset\mathfrak{p}_0.$$

因而

$$\begin{aligned}s\mathfrak{h}^{+}&=(p-c)\mathfrak{h}^{+}\subset\mathfrak{k}_0\cap\mathfrak{p}_0=\{0\},\\ s\mathfrak{h}^{-}&=(p-c)\mathfrak{h}^{-}\subset\mathfrak{k}_0\cap\mathfrak{p}_0=\{0\},\end{aligned}$$

即 $s\mathfrak{h}=0$. 因为 $\operatorname{ad}x$ 是半单的且所有特征根均为实数, 所以 $s\mathfrak{h}=0$ 当且仅当 $\operatorname{ad}x(\mathfrak{h})=0$. 即 $p|_{\mathfrak{h}}=Id$. □

引理 1.4 (1) 设 $k\in K$, 若 $k\mathfrak{h}^{-}=\mathfrak{h}^{-}$, 则存在 $k_1\in K$, 使得 $k_1\mathfrak{h}^{+}=\mathfrak{h}^{+}$, 且 $k_1\mathfrak{h}=k\mathfrak{h}$ 对于任意 $h\in\mathfrak{h}^{-}$.

(2) 设 $k\in K$, 若 $k\mathfrak{h}^{+}=\mathfrak{h}^{+}$, 则存在 $k_1\in K$, 使得 $k_1\mathfrak{h}^{-}=\mathfrak{h}^{-}$, 且 $k_1h=kh$ 对于任意 $h\in\mathfrak{h}^{+}$.

证 由引理 1.2 可知, $Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}^{+}),Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}^{-})$ 是实约化李代数. 记 K 的子群

$$K(\mathfrak{h}^{\pm})=\{e^{\operatorname{ad}x}|x\in Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}^{\pm})\cap\mathfrak{k}_0\}$$

则 $K(\mathfrak{h}^{\pm})$ 在 $Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}^{\pm})$ 上的限制为 $Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}^{\pm})$ 内自同构群中与 τ 可交换的极大紧子群.

任取 $x\in Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}^{+})$, 若 $[\mathfrak{h}^{-},x]=0$, 则有 $[\mathfrak{h},x]=0$, 因而 $x\in\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}_0=\mathfrak{h}^{-}$, 所以 $\mathfrak{h}^{-}$ 为 $Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}^{+})$ 关于 t 的约化 Cartan 子代数. 同理可证 $\mathfrak{h}^{+}$ 为 $Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}^{-})\cap\mathfrak{k}_0$ 的 Cartan 子代数.

设 $k\mathfrak{h}^{+}=\mathfrak{h}^{+}$, 那么 $\mathfrak{h}_1^{-}=k\mathfrak{h}^{-}$ 也是 $Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}^{+})$ 的约化 Cartan 子代数. 由第二章定理及前面的讨论, 存在 $\tilde{k_1}\in K(\mathfrak{h}^{+})$ 使 $\tilde{k_1}\mathfrak{h}_1^{-}=\mathfrak{h}^{-}$. 显然 $\tilde{k_1}h=h$ 对于任意 $h\in\mathfrak{h}^{+}$, $k_1=\tilde{k_1}k$ 即为 (2) 所求. 类似可证 (1). □

利用引理 1.4, 我们有下面结论.

定理 1.5 设 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的两个 Cartan 子代数，则 $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 共轭当且仅当 $\mathfrak{h}_1^+$ 与 $\mathfrak{h}_2^+$ 或者 $\mathfrak{h}_1^-$ 与 $\mathfrak{h}_2^-$ 在 K 下共轭.

证 由引理 1.3, $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 共轭当且仅当 $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 关于 K 共轭，即存在 $k \in K$, 使 $k\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$. 又由第二章定理， $k\mathfrak{h}_1^+ = \mathfrak{h}_2^+$, $k\mathfrak{h}_1^- = \mathfrak{h}_2^-$.

反之，设有 $k \in K$, 使 $k\mathfrak{h}_1^+ = \mathfrak{h}_2^+$ 或者 $k\mathfrak{h}_1^- = \mathfrak{h}_2^-$. 由引理 1.4, 存在 $k_1 \in K$, 使 $k_1\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$. □

引理 1.6 设 $\mathfrak{u}$ 是紧李代数，$\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{u}$ 的 Cartan 子代数，$\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ 是 $\mathfrak{t}$ 的两个子空间. U 为 $\mathfrak{u}$ 的内自同构群. 若存在 $k \in U$, 使 $k\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$, 则存在 $\mathfrak{u}$ 关于 $\mathfrak{t}$ 的 Weyl 群中元素 s , 使 $s\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$ 且 $s(h) = k_1(h)$ 对于 $h \in \mathfrak{t}_1$.

证 因为 $Z_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{t}_2)$ 是 $\mathfrak{u}$ 的紧子代数. 显然 $\mathfrak{t}$ 与 $k(\mathfrak{t})$ 是其两个 Cartan 子代数. 类似引理 1.4, 可证明存在 $\tilde{k_1} \in U$, 使 $\tilde{k_1}k\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$ 且 $\tilde{k_1}h = h$ 对于 $h \in \mathfrak{t}_2$. 令 $k_1 = \tilde{k_1}k$, 则 $k_1\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$, $k_1h = kh$ 对于 $h \in \mathfrak{t}_1$, $s \in k_1|_{\mathfrak{t}} \in W(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ 即为所求. □

定理 1.7 设 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的两个 Cartan 子代数， $\mathfrak{h}_i^+ \subset \mathfrak{h}_0^+((i = 1, 2)$. 则 $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 共轭当且仅当 $\mathfrak{h}_1^+$ 与 $\mathfrak{h}_2^+$ 在 $\mathfrak{k}_0$ 的 Weyl 群 $W(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{h}_0^+)$ 下共轭.

证 因为 $\mathfrak{k}_0$ 是紧李代数， $\mathfrak{h}_0^+$ 为其 Cartan 子代数，由定理 1.5 及引理 1.6 易证推论. □

定义 1.8 (1) 根 $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{h})$, 若满足 $\tau(\alpha) = -\alpha$ 或 $\tau(\alpha) = \alpha$, 则分别称为实根或虚根. 其它的根称为复根. 记 $\Sigma_R(\mathfrak{h})$ 与 $\Sigma_I(\mathfrak{h})$ 分别为 $\Sigma(\mathfrak{h})$ 中所有实根与虚根. 特别 $\Sigma_I(\mathfrak{h}_0)$ 表示为 Σ_I.

(2) 虚根 $\alpha \in \Sigma_I(\mathfrak{h})$, 若根子空间 $\mathfrak{g}_\alpha \in \mathfrak{k}$, 则称 α 为紧虚根，否则称为非紧虚根，记 $\Sigma_c(\mathfrak{h})$ 与 $\Sigma_n(\mathfrak{h})$ 分别 $\Sigma_I(\mathfrak{h})$ 为中所有紧虚根与非紧虚根. 同样用 Σ_c, Σ_n 表示 $\Sigma_c(\mathfrak{h}_0)$ 与 $\Sigma_n(\mathfrak{h}_0)$.

(3) $\Sigma_R^+(\mathfrak{h}), \Sigma_I^+(\mathfrak{h}), \Sigma_c^+(\mathfrak{h})$ 与 $\Sigma_n^+(\mathfrak{h})$ 为对应的正根.

由定义不难看出 $\alpha \in \Sigma_R(\mathfrak{h})$ 或 $\alpha \in \Sigma_I(\mathfrak{h})$ 当且仅当 $\alpha(\mathfrak{h}^+) = 0$ 或 $\alpha(\mathfrak{h}^-) = 0$.

实根与非紧虚根在实半单李代数 Cartan 子代数共轭分类中，扮演着十分重要的角色. 我们先从一个最简单但十分重要的例子出发，看看如何通过实根或非紧虚根将一个 Cartan 子代数变换为另一个与其不共轭的 Cartan 子代数.

例 设 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, Cartan 对合 $\tau(X) = -X^T$ 对于 $X \in \mathfrak{g}_0$, 于是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. 不难证明 $\mathfrak{g}_0$ 只有两个 Cartan 子代数共轭类.

(1) $T-$ 正则 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h}_0 = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\},$$
$$\Sigma = \Sigma_n = \{\pm\frac{1}{4}\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\} = \{\pm\alpha\}.$$

记

$$h_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & -1 \end{pmatrix},$$
$$f_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$[h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, \quad [h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha, \quad [e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha,$$

且根子空间为

$$\mathfrak{g}_\alpha = \mathbf{C}e_\alpha, \quad \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathbf{C}f_\alpha.$$

令

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{1}{2}(e_\alpha + f_\alpha) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ F_\alpha &= \frac{1}{2}\sqrt{-1}(e_\alpha - f_\alpha) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad (\text{Ⅲ}.1.1)$$

则

$$\mathfrak{k}_0 = \sqrt{-1}\mathbf{R}h_\alpha, \quad \mathfrak{p}_0 = \mathbf{R}E_\alpha + \mathbf{R}F_\alpha. \qquad (\text{Ⅲ}.1.2)$$

(2) 正则子代数

$$\begin{aligned} &\mathfrak{h}_s = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} | a \in \mathbf{R}\}, \\ &\Sigma(\mathfrak{h}_s) = \Sigma_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h}_s) = \{\pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\} = \{\pm\beta\}. \end{aligned}$$

记

$$h_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $[h_\beta, X_\beta] = 2X_\beta, [h_\beta, Y_\beta] = -2Y_\beta, [X_\beta, Y_\beta] = h_\beta$. 根子空间

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}_\beta = \mathbf{C}X_\beta, \quad \mathfrak{g}_{-\beta} = \mathbf{C}Y_\beta, \\ &\mathfrak{k}_0 = \mathbf{R}(X_\beta - Y_\beta), \quad \mathfrak{p}_0 = \mathbf{R}h_\beta + (X_\beta + Y_\beta). \end{aligned}$$

比较 (Ⅲ.1.1) 与 (Ⅲ.1.2) 有

$$h_\beta = 2E_\alpha, \quad h_\alpha = X_\beta - Y_\beta.$$

令

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}F_\alpha} = e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(X_\beta+Y_\beta)}, \tag{Ⅲ.1.3}$$

则

$$Ah_\alpha A^{-1} = h_\beta, \tag{Ⅲ.1.4}$$

$$A\mathfrak{g}_\alpha A^{-1} = \mathfrak{g}_\beta, \quad A\mathfrak{g}_{-\alpha}A^{-1} = \mathfrak{g}_{-\beta}, \tag{Ⅲ.1.5}$$

记这个变换为 $\tilde{C}_\alpha$, 其逆变换记为 $\tilde{d}_\beta$, 于是

$$\tilde{C}_\alpha(\mathfrak{h}_0^{\mathbf{C}}) = \mathfrak{h}_s^{\mathbf{C}}, \ \tilde{d}_\beta(\mathfrak{h}_s^{\mathbf{C}}) = \mathfrak{h}_0^{\mathbf{C}}. \tag{Ⅲ.1.6}$$

对一般实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$, 任取 $\alpha \in \Sigma_n(\mathfrak{h})$, 因为 $\tau(\alpha) = \alpha$, $\bar{\alpha} = -\alpha$, 所以

$$\tau(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha, \ \bar{\mathfrak{g}}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

因为 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$, $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} \notin \mathfrak{k}$, 所以 $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} \in \mathfrak{p}$. 任取 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 满足 $(X_\alpha, \bar{X}_\alpha) = \frac{2}{(\alpha,\alpha)}$. 令

$$\begin{cases} h_\alpha = [X_\alpha, \ \bar{X}_\alpha], \\ E_\alpha = \frac{1}{2}(X_\alpha + \bar{X}_\alpha), \\ F_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2}(X_\alpha - \bar{X}_\alpha), \end{cases} \tag{Ⅲ.1.7}$$

则 $\sqrt{-1}h_\alpha = 2\sqrt{-1}\alpha/(\alpha,\alpha) \in \mathfrak{h}^+$, $E+_\alpha \in \mathfrak{p}_0$, $F_\alpha \in \mathfrak{p}_0$, $\sqrt{-1}h_\alpha$, E_α, F_α 生成 $\mathfrak{g}_0$ 中三维单李代数 $\mathfrak{s}_\alpha$, 定义

$$\begin{cases} \phi: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to E_\alpha, \\ \phi: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to F_\alpha, \\ \phi: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to \sqrt{-1}h_\alpha, \end{cases} \tag{Ⅲ.1.8}$$

不难证明 ϕ 导出李代数同构

$$\phi: \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \to \mathfrak{s}_\alpha. \tag{Ⅲ.1.9}$$

令

$$\tilde{C}_\alpha = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}\mathrm{ad}F_\alpha, \tag{Ⅲ.1.10}$$

$$\alpha = \{X \in \mathfrak{h} | (h_\alpha, X) = 0\}. \tag{Ⅲ.1.11}$$

显然 $\tilde{C}_\alpha$ 限制在 α 上为恒等变换. 由 (Ⅲ.1.4), (Ⅲ.1.6), (Ⅲ.1.7), (Ⅲ.1.10) 及 (Ⅲ.1.13) 可证

$$\tilde{C}_\alpha(\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}) = (\alpha^\perp)^{\mathbf{C}} + \mathbf{C}E_\alpha \tag{Ⅲ.1.12}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的 τ 不变 Cartan 子代数, 且

$$\tilde{C}_\alpha(\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}) \cap \mathfrak{g}_0 = \alpha + \mathbf{R}E_\alpha \tag{Ⅲ.1.13}$$

是 $\mathfrak{g}_0$ 的 τ 不变 Cartan 子代数, 记作 $C_\alpha(\mathfrak{h})$.

不难证明下面命题.

命题 1.9 (1) $C_\alpha(\mathfrak{h})^+ = C_\alpha(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{h}^+ \subset \mathfrak{h}^+$, $\dim C_\alpha(\mathfrak{h})^+ = \dim \mathfrak{h}^+ - 1$.

(2) $C_\alpha(\mathfrak{h})^- = \mathfrak{h}^- + \mathbf{RE}_\alpha$.

(3) $\tilde{C}_\alpha(\alpha) \in \Sigma_{\mathbf{R}}(C_\alpha(\mathfrak{h}))$.

类似地, 设 $\alpha \in \Sigma_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h})$, 则 $\bar{\alpha} = \alpha$, $\tau(\alpha) = -\alpha$, 于是 $\bar{\mathfrak{g}_\alpha} = \mathfrak{g}_\alpha$, $t(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$. 任取 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_0, Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \cap \mathfrak{g}_0$ 满足 $(X_\alpha, Y_\alpha) = \frac{2}{(\alpha,\alpha)}$. 记 $h_\alpha = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$. 则 h_α, X_α, Y_α 生成 $\mathfrak{g}_0$ 的三维单子代数 $\mathfrak{s}_\alpha$. 定义

$$\begin{cases} \psi: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to X_\alpha, \\ \psi: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to Y_\alpha, \\ \psi: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to h_\alpha, \end{cases} \tag{Ⅲ.1.14}$$

同样 ψ 导出李代数同构

$$\psi : \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \to \mathfrak{g}_o. \tag{Ⅲ.1.15}$$

令

$$\tilde{d}_\alpha = e^{\frac{-1}{4}\pi\sqrt{-1}\mathrm{ad}(X_\alpha+Y_\alpha)}, \tag{Ⅲ.1.16}$$

类似 (Ⅲ.1.12), 我们有

$$\tilde{d}_\alpha(\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}) = (\alpha^\perp)^{\mathbf{C}} + \mathbf{C}(X_\alpha - Y_\alpha) \tag{Ⅲ.1.17}$$

为 $\mathfrak{g}$ 的 τ 不变 Cartan 子代数, 并且

$$\mathfrak{g}_0 \cap \tilde{d}_\alpha(\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}) = \alpha^\perp \dot{+} \mathbf{R}(X_\alpha - Y_\alpha) \tag{Ⅲ.1.18}$$

为 $\mathfrak{g}_0$ 的 τ 不变 Cartan 子代数, 记作 $d_\alpha(\mathfrak{h})$, 其中 $\alpha^\perp = \{h \in \mathfrak{h} | \alpha(h) = 0\}$.

命题 1.10 (1) $d_\alpha(\mathfrak{h})^+ = \mathfrak{h}^+ \dot{+} \mathbf{R}(X_\alpha - Y_\alpha)$.

(2) $d_\alpha(\mathfrak{h})^- \subset \mathfrak{h}^-$, 并且

$$\dim d_\alpha(\mathfrak{h})^- = \dim \mathfrak{h}^- - 1.$$

(3) $\tilde{d}_\alpha(\alpha) \in \Sigma_n(d_\alpha(\mathfrak{h}))$.

比较 (Ⅲ.1.2), (Ⅲ.1.10), (Ⅲ.1.16) 式有下面命题.

命题 1.11 设 $\alpha \in \Sigma_n(\mathfrak{h})$, $\beta = \tilde{C}_\alpha(\alpha) \in \Sigma_{\mathbf{R}}(\tilde{C}_\alpha(\mathfrak{h}))$, 则 $\tilde{d}_\beta$ 是 $\tilde{C}_\alpha$ 的逆变换, 因而 $d_\beta \circ C_\alpha(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

C_α 与 d_α 称作 **Cayley 变换**(Cayley transformation).

关于 Cayley 变换还有下列命题.

命题 1.12 (1) 设 $\alpha \in \Sigma_n(\mathfrak{h})$, 则

$$\tilde{C}_\alpha^{-1}\tau\tilde{C}_\alpha|_{\mathfrak{h}^C} = \tau\mathfrak{r}_\alpha|_{\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}},$$

其中 $\mathfrak{r}_\alpha$ 为关于 α 的反射.

(2) 设 $\alpha \in \Sigma_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h})$, 则

$$\tilde{d}_\alpha^{-1} \tau d_\alpha|_{\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}} = \tau \mathfrak{r}_\alpha|_{\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}},$$

其中 $\mathfrak{r}_\alpha$ 为关于 α 的反射.

证 (1) 设

$$P_\alpha = \{X \in \mathfrak{h}^{\mathbf{C}} | (\alpha, X) = 0\}.$$

由 $\tilde{C}_\alpha$ 定义

$$\tilde{C}_\alpha|_{P_\alpha} = Id, \quad \tilde{C}_\alpha(\alpha) \in \mathfrak{p}.$$

因为 $\tau(\alpha) = \alpha$, 所以 $\tau(P_\alpha) = P_\alpha$. 因而

$$\tau \tilde{C}_\alpha^{-1} \tau \tilde{C}_\alpha|_{P_\alpha} = Id, \quad \tau \tilde{C}_\alpha^{-1} \tau \tilde{C}_\alpha(\alpha) = -\alpha.$$

于是 $\tau \tilde{C}_\alpha^{-1} \tau \tilde{C}_\alpha = \mathfrak{r}_\alpha$, 即

$$\tilde{C}_\alpha^{-1} \tau \tilde{C}_\alpha|_{\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}} = \tau \mathfrak{r}_\alpha|_{\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}}.$$

同理可证 (2). □

引理 1.13 (1) 任取不同的 $\alpha, \beta \in \Sigma_n(\mathfrak{h})$, 若 $\alpha \pm \beta \notin \Sigma(\mathfrak{h})$, 则 $\beta = \tilde{C}_\alpha(\beta) \in \Sigma_n(C_\alpha(\mathfrak{h}))$.

(2) 任取不同的 $\alpha, \beta \in \Sigma_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h})$, 若 $\alpha \pm \beta \notin \Sigma(\mathfrak{h})$, 则 $\beta = \tilde{d}_\alpha(\beta) \in \Sigma_n(\tilde{d}_\alpha(\mathfrak{h}))$.

证 (1) 若 $\alpha + \beta \notin \Sigma(\mathfrak{h})$, 由定义可知

$$\tilde{C}_\alpha|_{\mathfrak{g}_{\pm\beta}} = Id.$$

且 $(\alpha, \beta) = 0$. 所以 $\beta \in C_\alpha(\beta) \in \Sigma(C_\alpha(\mathfrak{h}))$ 及 $\mathfrak{g}_{\pm\beta} \notin \mathfrak{k}$. 因而 $\beta = C_\alpha(\beta) \in \Sigma_n(c_\alpha(\mathfrak{h}))$.

类似可证 (2). □

定理 1.14 (1) $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 $T-$ 正则 Cartan 子代数当且仅当

$$\Sigma_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h}) = \emptyset.$$

(2) $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的正则 Cartan 子代数当且仅当

$$\Sigma_n(\mathfrak{h}) = \emptyset.$$

证 (1) 由命题 1.9, 1.10 可知 $\mathfrak{h}$ 是 $T-$ 正则 Cartan 子代数, 则

$$\Sigma_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h}) = \emptyset.$$

反之, 设 $\Sigma_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h}) = \emptyset$, 任取 $X \in Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}^+) \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^+)$

$$X = h \dot{+} \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{h})} X_\alpha,$$

其中 $h \in \mathfrak{h}^C$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, 且有

$$0 = [\mathfrak{h}^+, X] = \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{h})} \alpha(\mathfrak{h}^+) X_\alpha.$$

因为 $\Sigma(\mathfrak{h})$ 中没有实根, 所以任取 $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{h})$, $\alpha(\mathfrak{h}^+) \neq 0$, 因此 $X_\alpha = 0$, 即 $X = h \in \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$. 又 $X \in \mathfrak{k}_0$, 所以 $X \in \mathfrak{h}^+$. 即 $\mathfrak{h}^+$ 是 $\mathfrak{k}_0$ 的极大 Abel 子代数, 因而是 $\mathfrak{k}_0$ 的 Cartan 子代数. 所以 $\mathfrak{h}$ 是 $T-$ 正则的.

同理可证 (2). □

有了上述准备, 现在可以讨论 Cartan 子代数的共轭分类. 固定 $T-$ 正则 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0$, 记:

$$L = \{X \in \mathfrak{h}_0^+ | (X, \mathfrak{h}^+) = 0\}, \qquad (\text{III}.1.19)$$

$$\Sigma(L) = \{\alpha \in \Sigma | \sqrt{-1}\alpha \in L\}, \qquad (\text{III}.1.20)$$

$$H = \mathfrak{h}^+ + \mathfrak{h}_0^- = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}_0. \qquad (\text{III}.1.21)$$

而

$$\begin{aligned} Z_{\mathfrak{g}_0}(H)^{\mathbf{C}} &= Z_{\mathfrak{g}}(H^{\mathbf{C}}) \\ &= \mathfrak{h}_0^{\mathbf{C}} + \sum_{\alpha\in\Sigma(L)} \mathfrak{g}_\alpha. \end{aligned} \qquad (Ⅲ.1.22)$$

由引理 2, $Z_{\mathfrak{g}_0}(H)$ 是实约化李代数, τ 在 $Z_{\mathfrak{g}_0}(H)$ 上的限制为其 Cartan 对合. 由 (Ⅲ.1.7)

$$\begin{aligned} Z_{\mathfrak{g}_0}(H)\cap\mathfrak{p}_0 &= \{X\in Z_{\mathfrak{g}_0}(H)|\tau(X)=-X\} \\ &= \mathfrak{h}_0^- + \sum_{\alpha\in\Sigma_n^+\cap\Sigma(L)} (\mathbf{R}E_\alpha+\mathbf{R}F_\alpha). \end{aligned} \qquad (Ⅲ.1.23)$$

引理 1.15 设 $F=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}\subset\Sigma_n^+\cap\Sigma(L)$, 满足下述两个条件:

(1) 任取 $\alpha_i,\alpha_j\in F$, $\alpha_i\pm\alpha_j\notin\Sigma$,

(2) F 是 $\Sigma_n^+\cap\Sigma(L)$ 中满足 (1) 的最大子集,

则

$$\mathfrak{a}(F)=\mathfrak{h}^- + \sum_{\alpha\in F}\mathbf{R}E_\alpha \qquad (Ⅲ.1.24)$$

是 $Z_{\mathfrak{g}_0}(H)$ 的约化 Cartan 子代数 (即 $Z_{\mathfrak{g}_0}(H)\cap\mathfrak{p}_0$ 中极大 Abel 子代数).

证 任取 $\alpha_i,\alpha_j\in F\subset\Sigma_n$. 因为 $\alpha_i\pm\alpha_j\notin\Sigma$, 由 (Ⅲ.1.7) 式,

$$[E_{\alpha_i},E_{\alpha_j}]=0,\ [\mathfrak{h}_0^-,E_{\alpha_i}]=0,$$

且 $\mathfrak{a}(F)\subset\mathfrak{p}_0$. 因此 $\mathfrak{a}(F)$ 是 $Z_{\mathfrak{g}_0}(H)\cap\mathfrak{p}_0$ 的 Abel 子代数. 任取 $X\in Z_{\mathfrak{g}_0}(H)\cap\mathfrak{p}_0$ 使 $[X,\mathfrak{a}(F)]=0$. 由 (Ⅲ.1.23), 可设

$$X=\sum_{j=1}^n(a_jE_{\beta_j}+b_jF_{\beta_j})+\sum_{\alpha_i\in F_i}((c_iF_{\alpha_i}+d_iZ_{\alpha_i})+h,$$

其中 $\beta_i \in \Sigma^+ \cap \Sigma(L)/F$, a_j, b_j, c_i, $d_i \in \mathbf{R}$, $h \in \mathfrak{h}^-$. 任取 $\alpha_l \in F$, 由 (Ⅲ.1.1), (Ⅲ.1.7), (Ⅲ.1.8) 式，得

$$\begin{aligned}[X, E_l] &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((a_i + \sqrt{-1}b_i)[X_{\beta_i}, X_{\alpha_l}] \\ &\quad +(a_i - b_i\sqrt{-1})[\bar{X}_{\beta_i}, \bar{X}_{\alpha_l}]) \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((a_i + \sqrt{-1}b_i)[X_{\beta_i}, \bar{X}_{\alpha_l}] \\ &\quad +(\alpha_i - b_i\sqrt{-1})[\bar{X}_{\beta_i}, X_{\alpha_l}]) + c_l\sqrt{-1}h_{\alpha_l} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{Ⅲ.1.25}$$

记 $F(X) = \{\beta_j | a_j, b_j$ 不全为零$\}$. 由 F 的选取可知, 若 $F(X) \neq \emptyset$, 则存在 $\beta_j \in F(X)$, $\alpha_i \in F$, 使 $\alpha_i + \beta_i \in \Sigma$ 或 $\alpha_i - \beta_i \in \Sigma$, 因而

$$[E_{\beta_i}, E_{\alpha_i}](\neq 0) \in \mathfrak{g}_{\alpha_i+\beta_i} \text{ 或 } [E_{\beta_i}, F_{\alpha_i}](\neq 0) \in \mathfrak{g}_{\alpha_i-\beta_i},$$

若 $\alpha_i + \beta_i \in \Sigma$, 取 $\beta_\lambda \in F(X)$, $\alpha_\mu \in F$, 使 $\alpha_\mu + \beta_\lambda$ 为 $\{\alpha_i + \beta_i \in \Sigma\}$ 中一个最高权. 比较 (Ⅲ.1.23), 必有 $a_\lambda + b_\lambda\sqrt{-1} = 0$, 因而 $a_\lambda = b_\lambda = 0$, 因此

$$\{\beta_j \in F(X) | \text{ 存在 } \alpha_i \in F, \text{ 使 } \alpha_i + \beta_j \in \Sigma\} = \emptyset.$$

同理可证

$$\{\beta_j \in F(X) | \text{存在 } \alpha_i \in F, \text{ 使 } \alpha_i - \beta_j \in \Sigma\} = \emptyset.$$

即 $F(X) = \emptyset$.

因为 F 中的根正交，所以 $h_{\alpha_1}, \cdots, h_{\alpha_l}$ 线性无关，因此由 (Ⅲ.1.23) 式有 $c_i = 0\,(i = 1, \cdots, n)$, 即 $X \in \mathfrak{a}(F)$. 于是 $\mathfrak{a}(F)$ 是

$Z_{\mathfrak{g}_0}(H)\cap\mathfrak{p}_0$ 中最大 Abel 子代数，即 $Z_{\mathfrak{g}_0}(H)$ 的约化 Cartan 子代数. □

定理 1.16 F 与 $\mathfrak{a}(F)$ 同上，则 $\mathfrak{h}^+\dot{+}\mathfrak{a}(F)$ 是与 $\mathfrak{h}$ 共轭的 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数.

证 因为 $\mathfrak{h}\subset Z_{\mathfrak{g}_0}(H)$, 所以 $\mathfrak{h}^-$ 是 $Z_{\mathfrak{g}_0}(H)\cap\mathfrak{p}_0$ 中一 Abel 子代数. 由第二章定理

$$\dim\mathfrak{h}^-\leq\dim\mathfrak{a}(F).$$

显然 $\mathfrak{h}^+ + \mathfrak{a}(F)$ 是 Abel 子代数，且其每一个元半单，所以有 $\mathfrak{g}_0$ 中 Cartan 子代数包含它. 又因为 $\mathfrak{g}_0$ 的所有 Cartan 子代数有相同的维数，所以

$$\begin{aligned}\dim(\mathfrak{h}^+\dot{+}\mathfrak{a}(F)) &\leq\dim\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{h}^+ +\dim\mathfrak{h}^-\\ &\leq\dim\mathfrak{h}^+ +\dim\mathfrak{a}(F)\\ &=\dim(\mathfrak{h}^+ +\mathfrak{a}(F)),\end{aligned}$$

即 $\dim(h^+ +\mathfrak{a}(F))=\dim\mathfrak{h}$, 因而 $\mathfrak{h}^+ +\mathfrak{a}(F)$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. 又 $(\mathfrak{h}^+ +\mathfrak{a}(F))^+=\mathfrak{h}^+$, 由定理 1.7, $\mathfrak{h}^+ +\mathfrak{a}(F)$ 与 $\mathfrak{h}$ 共轭. □

推论 1.17 L, F 同上，则 $L=\sum_{\alpha\in F}\mathbf{R}h_\alpha$.

证 因为 $\mathfrak{h}_0=L\dot{+}\mathfrak{h}^+\dot{+}\mathfrak{h}_0^-$, $\mathfrak{a}(F)=\mathfrak{h}_0^- +\sum_{\alpha\in F}\mathbf{R}E_\alpha$, 由定理 1.16, 比较维数

$$\dim L=\dim\sum_{\alpha_i\in F}\mathbf{R}E_{\alpha_i}=|F|.$$

因为 F 中元两两正交，所以 $h_{\alpha_1},\ldots,h_{\alpha_l}$, $\alpha_i\in F$ 线性无关，于是

$$\dim\sum_{\alpha_i\in F}\mathbf{R}E_{\alpha_i}=\dim L,$$

由定义 $h_{\alpha_i} \in L$, 所以

$$\sum_{\alpha_i \in F} \mathbf{R} E_{\alpha_i} = L. \qquad \square$$

由引理 1.13, 我们可归纳定义 F 的 Cayley 变换

$$C_F = C_{\alpha_1} \circ \cdots \circ C_{\alpha_l}. \tag{Ⅲ.1.26}$$

由引理 1.13 及 Cayley 变换定义, 不难证明 C_F 与的 C_{α_i} 排列顺序无关.

定理 1.18 $\mathfrak{h}^+ + \mathfrak{a}(F) = C_F(\mathfrak{h}_0)$.

证 由 F 的选取, 显然, $\forall \alpha_i \in F, \alpha_i(\mathfrak{h}^+) = 0$, 显然 $\mathfrak{h}^+ \subset C_F(\mathfrak{h}_0)$ 及 $\mathfrak{a}(F) \subset C_F(\mathfrak{h}_0)$. 由定理 1.16, $\mathfrak{h}^+ + \mathfrak{a}(F) = C_F(\mathfrak{h}_0)$.$\square$

定义 1.19 设 $F = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\} \subset \Sigma_n^+$, 若任取 $\alpha_i, \alpha_j \in F$, $\alpha_i \pm \alpha_j \notin \Sigma$, 则称 F 为强正交系.

由定理 1.16, 1.18 我们有下面推论.

推论 1.20 $\mathfrak{g}_0$ 的任意 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$, 均存在 Σ_n^+ 的强正交系 F, 使 $\mathfrak{h}$ 与 $C_F(\mathfrak{h}_0)$ 共轭.

定义 1.21 设 F_1, F_2 是 Σ_n^+ 的两个强正交系, 如果 $L_i(F_i) = \sum_{\alpha \in F} \mathbf{R} h_\alpha$ $(i = 1, 2)$ 在 $\mathfrak{k}_0$ 的 Weyl 群 $W(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{h}_0^+)$ 下共轭, 则称 F_1, F_2 等价, 记作 $F_1 \sim F_2$.

定理 1.22 设 F_1, F_2 是 Σ_n^+ 两个强正交系, 则 $C_{F_1}(\mathfrak{h}_0)$ 与 $C_{F_2}(\mathfrak{h}_0)$ 共轭当且仅当 $F_1 \sim F_2$.

证 由推论 1.17,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_i^+ &= C_{F_i}(\mathfrak{h}_0)^+ \\ &= \{X \in \mathfrak{h}_0^+ | (h_\alpha, X) = 0, \ \forall \alpha \in F_i\} \\ &= L(F_i)^\perp. \end{aligned}$$

由定理 1.7, $C_{F_1}(\mathfrak{h}_0)$ 与 $C_{F_2}(\mathfrak{h}_0)$ 共轭当且仅当 $\mathfrak{h}_1^+$ 与 $\mathfrak{h}_2^+$ 在 $W(\mathfrak{k}_0,\mathfrak{h}_0)$ 下共轭, 又 Weyl 群保持 $\mathfrak{h}_0^+$ 上内积不变 (负的 Killing 形在 $\mathfrak{h}_0$ 上的限制), 因此 $\mathfrak{h}_1^+,\mathfrak{h}_2^+$ 在 $W(\mathfrak{k}_0,\mathfrak{h}_0)$ 下共轭当且仅当其正交补 $L(F_1),L(F_2)$ 在 $W(\mathfrak{k}_0,\mathfrak{h}_0)$ 下共轭, 即 $F_1\sim F_2$. □

综上所述, 可得以下定理.

Cartan 子代数分类定理 I 实半单李代数的 Cartan 子代数的共轭类与 Σ_n^+ 中强正交系等价类之间, 由 Cayley 变换导出一个一一对应.

以上讨论了如何从 $T-$ 正则 Cartan 子代数, 通过 Cayley 变换, 构造实半单李代数的 Cartan 子代数共轭类. 与之类似, 我们也可以由一个正则 Cartan 子代数, 由 Cayley 变换, 构造出所有的实半单李代数 Cartan 子代数共轭类.

定义 1.23 设 $\mathfrak{h}_s$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个正则 Cartan 子代数, $F=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}\subset\Sigma_{\mathbf{R}}^+(\mathfrak{h}_s)$. 若任取 $\alpha_i,\alpha_j\in F$, $\alpha_i\pm\alpha_j\notin\Sigma(\mathfrak{h}_s)$, 则称 F 为 $\Sigma_{\mathbf{R}}^+(\mathfrak{h}_s)$ 的实强正交系.

类似推论 1.20 可证下面命题.

命题 1.24 $\mathfrak{g}_0$ 的任意 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$, 均存在 $\Sigma_{\mathbf{R}}^+(\mathfrak{h}_s)$ 的实强正交系, 使 $\mathfrak{h}$ 与 $d_F(\mathfrak{h}_s)$ 共轭. (d_F 的定义类似 C_F.)

定义 1.25 设 F_1,F_2 是 $\Sigma_{\mathbf{R}}^+(\mathfrak{h}_s)$ 的实强正交系, 如果 $L(F_1)=\sum_{\alpha\in F_1}\mathbf{R}h_\alpha$ 与 $L(F_2)=\sum_{\beta\in F_2}\mathbf{R}h_\beta$ 在 $\mathfrak{h}^-$ 的约化 Weyl 群下共轭, 则称 F_1,F_2 等价, 记作 $F_1\sim F_2$.

类似定理 1.22, 可证下述定理.

定理 1.26 F_1,F_2 是两个 $\Sigma_{\mathbf{R}}^+(\mathfrak{h}_s)$ 的实强正交系, $d_{F_1}(\mathfrak{h}_s)$ 与 $d_{F_2}(\mathfrak{h}_s)$ 共轭当且仅当 $F_1\sim F_2$.

于是我们有第二个分类定理.

Cartan 子代数分类定理 II 实半单李代数 Cartan 子代数共轭类与 $\Sigma_{\mathbf{R}}^+(\mathfrak{h}_s)$ 中实强正交系的等价类, 通过 Cayley 变换

导出一个一一对应.

注 事实上我们可以证明，Σ_n^+ 中任一强正交系 F 均可扩充为一个极大 (元素最多的) 强正交系 F_m.

设 $F=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$,

$$F_m=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l,\alpha_{l+1},\cdots,\alpha_{l+s}\}.$$

令 $\beta_i=C_{F_m}(\alpha_{i+l})$, 则 $C_{F_m}(\mathfrak{h}_0)$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的正则 Cartan 子代数，且 $F_s=\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$ 是 $\Sigma_{\mathbf{R}}^+(C_{F_m}(\mathfrak{h}_0))$ 中实强正交系，由命题 1.11

$$C_F(\mathfrak{h}_0)=d_{F_s}\circ C_{F_m}(\mathfrak{h}_s).$$

这个公式给出了两个分类定理的关系.

我们可以利用角图或 Satake 图算出强正支系与实强正交系的等价类，从而给出 Cartan 子代数的共轭分类. 而前者计算远较后者简洁，因此在本附录第三部分中我们将只利用角图给出强正交系等价类，从而给出 Cartan 子代数分类的计算实例.

Ⅲ.2 实半单李代数的 Weyl 群

紧李代数的 Weyl 群在紧李代数及复半单李代数的表示理论中起着十分重要的作用. 同样实李代数的 Weyl 群在 (非紧) 实李群的无限维容许表示分类中也起着十分重要的作用. 本节我们将利用角图给出实半单李代数 Weyl 群的计算方法.

设 G 是 $\mathfrak{g}_0$ 的内自同构群，固定 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 及其正则分解 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^+\dot{+}\mathfrak{h}^-$. 令

$$N_G(\mathfrak{h})=\{g\in G|g(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}\},$$
$$Z_G(\mathfrak{h})=\{g\in N_G(\mathfrak{h})|g|_{\mathfrak{h}}=Id\},$$

$$W(\mathfrak{h}) = N_G(\mathfrak{h}). \tag{Ⅲ.2.1}$$

类似可定义 $W(\mathfrak{h}^+)$ 与 $W(\mathfrak{h}^-)$.

定义 2.1 $W(\mathfrak{h})$ 称作实半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的 Weyl 群.

与紧李代数或复半单李代数不同, 实半单李代数的 Cartan 子代数一般不互相共轭. 因而, 对应的 Weyl 群有不同的结构.

记 $W(\mathfrak{h}^C)$ 与 $W(\mathfrak{k})$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}^c$ 与 $\mathfrak{k}$ 关于 $(\mathfrak{h}_0^+)^C$ 的 Weyl 群. $W_R(\mathfrak{h}), W_I(\mathfrak{h})$ 分别为 $W(\mathfrak{h}^C)$ 的由 $\Sigma(\mathfrak{h})$ 中实根与虚根反射生成的子群.

引理 2.2 (Chevalley 引理) 设 $X \in \mathfrak{h}^C$, 满足 $\alpha(X) \in \mathbf{R}$ 对于 $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{h})$. 记

$$\begin{aligned} \Sigma_X &= \{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{h}) | \alpha(X) = 0\}, \\ Z(X) &= \{w \in W(\mathfrak{h}^C) | w(X) = X\}, \end{aligned} \tag{Ⅲ.2.2}$$

则 $Z(X)$ 由 Σ_X 中根的反射生成.

证 在 $\Sigma(\mathfrak{h})$ 中取定一个与 X 相容的定向, 即 $\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{h})$, 则 $\alpha(X) \geq 0$, 任取 $w \in Z(X)$, 记 $n(w)$ 为 w 将正根变为负根的个数. 若 $w \neq Id$, 则 $n(w) \geq 1$, 且有素根 α, 使 $w(\alpha) \in \Sigma^-(\mathfrak{h})$. 因为 $\mathfrak{r}_\alpha$ 置换 $\Sigma^+(\mathfrak{h})/\{\alpha\}$ 且 $\mathfrak{r}_\alpha(\alpha) = -\alpha \in \mathfrak{t}^-(\mathfrak{h})$, 所以 $n(w\mathfrak{r}_\alpha) = \mathfrak{n}(\mathfrak{w}) - 1$. 由定向的选取有

$$0 \leq (X, \alpha) = (w^{-1}X, \alpha) = (X, w(\alpha)) \leq 0,$$

所以 $(X, \alpha) = 0$ 即 $\alpha(X) = 0$. 因而 $\mathfrak{r}_\alpha \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{X})$, $w\mathfrak{r}_\alpha \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{X})$. 利用归纳法可证, 存在与 X 正交的素根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ (可能有相同的) 使 $n(w\mathfrak{r}_\alpha, \cdots, \mathfrak{r}_{\alpha_k}) = 0$, 即 $w = \mathfrak{r}_{\alpha_k} \cdots \mathfrak{r}_{\alpha_1}$. □

引理 2.3 (1) $Z(\mathfrak{h}^+) = \{w \in W(\mathfrak{h}^C) | w|_{\mathfrak{h}^+} = Id\} = W_R(\mathfrak{h})$.

(2) $Z(\mathfrak{h}^-) = \{w \in W(\mathfrak{h}^C) | w|_{\mathfrak{h}^-} = Id\} = W_I(\mathfrak{h})$.

证　显然 $Z(\mathfrak{h}^+) = Z(\sqrt{-1}\mathfrak{h}^+)$. 而任取 $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{h})$, $X \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$, $\alpha(X) \in \mathbf{R}$. 取 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$ 的一组基 $X_1, \cdots, X_n$,

$$Z(\mathfrak{h}^+) = \cap_{i=1}^n Z(X_i). \tag{Ⅲ.2.3}$$

由引理 2.2, $Z(\mathfrak{h}^+)$ 由与 $\mathfrak{h}^+$ 正交的根的反射生成, 即 $Z(\mathfrak{h}^+) = W_R(\mathfrak{h})$. 同理可证 (2). □

由第二章的有关结果, 任取 $w \in W(\mathfrak{h}^C)$, 若 $w(\mathfrak{h}^+) = \mathfrak{h}^+$, $(w(\mathfrak{h}^-) = \mathfrak{h}^-)$, 则 $w(\mathfrak{h}^-) = \mathfrak{h}^-$ $(w(\mathfrak{h}^+) = \mathfrak{h}^+)$. 由引理 2.3 不难证明下面命题.

命题 2.4　(1) 在同态 $w \mapsto w|_{\mathfrak{h}^+}$ 下 $w(\mathfrak{h})$ 的像是 $W(\mathfrak{h}^+)$, 核为 $W_R(\mathfrak{h})$.

(2) 在同态 $w \mapsto w|_{\mathfrak{h}^-}$ 下 $w(\mathfrak{h})$ 的像是 $W(\mathfrak{h}^-)$, 核为 $w(\mathfrak{h}) \cap W_I(\mathfrak{h})$.

由引理 1.4, 我们还有下面引理.

引理 2.5　$W(\mathfrak{h}^+)$ 中每一个元素均是 $W(\mathfrak{k})$ 中令 $\mathfrak{h}^+$ 不变的元素在 $\mathfrak{h}^+$ 上的限制得到.

类似的还有如下引理.

引理 2.6　$W(\mathfrak{h}^-)$ 中每一个元素均可由 $\mathfrak{g}$ 的限制 Weyl 群中一个令 $\mathfrak{h}^-$ 不变的元素在 $\mathfrak{h}^-$ 上的限制得到.

命题 2.7　令 $W' = \{w \in W(\mathfrak{h}^C) | w(\mathfrak{h}^+) = \mathfrak{h}^+$, 且 $w|_{\mathfrak{h}^+} \in W(\mathfrak{h}^+)\}$, 则 $W' = W(\mathfrak{h})$.

证　显然 $W(\mathfrak{h}) \subset W'$. 令 $\mathfrak{h}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+ + \mathfrak{h}^-$, 则 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型限制在 $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ 上正定. 且 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}^+ \perp \mathfrak{h}^-$. 因而 W' 保持 $\mathfrak{h}^+, \mathfrak{h}^-, \mathfrak{h}$ 不变. 任取 $w' \in W'$, 由引理 2.4, 存在 $w \in W(\mathfrak{h})$, 使 $w'|_{\mathfrak{h}^+} = w|_{\mathfrak{h}^+}$, 即 $w' \cdot w^{-1}|_{\mathfrak{h}^+} = Id$. 又由引理 2.3, $w'w^{-1} \in W_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h}) \subset W(\mathfrak{h})$, 所以 $W' \subset W(\mathfrak{h})$. □

由引理 1.4, $W(\mathfrak{k})$ 中每一个元素可自然嵌入 $W(\mathfrak{h}_0^C)$. 事实上 $W(\mathfrak{k})$ 可作为 $W(\mathfrak{h}_0^C)$ 的一个子群.

我们知道 $W(\mathfrak{k})$ 是由 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0^+$ 上关于 $\mathfrak{k}$ 的素根系中根的反射生成. 具体说来, 设 Δ_0 是 $\mathfrak{k}$ 关于 $\mathfrak{h}_0^+$ 的一个素根系, Δ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}_0^C$ 的相容素根系, 则任取 $\alpha_i^* \in \Delta_0$, 存在 $\alpha_i \in \Delta$ 使 $\alpha_i^* = \frac{1}{2}(\alpha_i + \tau(\alpha_i))$, α_i^* 的反射为

$$\mathfrak{r}_{\alpha^*} = \begin{cases} \mathfrak{r}_{\alpha_i}|_{\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0^+}, & \text{若 } \tau(\alpha_i) = \alpha_i; \\ \mathfrak{r}_{\alpha_i+\tau(\alpha_i)}|_{\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0^+}, & \text{若 } \tau(\alpha_i) \neq \alpha_i, \text{ 且 } \alpha_i + \tau(\alpha_i) \in \Sigma; \\ \mathfrak{r}_{\alpha_i}\mathfrak{r}_{\tau(\alpha_i)}, & \text{若 } \tau(\alpha_i) \neq \alpha_i \text{ 且 } \alpha_i + \tau(\alpha_i) \notin \Sigma. \end{cases} \tag{Ⅲ.2.4}$$

定义映射 $\pi: W(\mathfrak{k}) \to W(\mathfrak{h}_0^C)$ 如下: 对生成元 $\mathfrak{r}_{\alpha_i^*}$, 依上述关系分别对应, 其它元按同态关系自然生成. 显然 π 是单同态. 记

$$W_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{k}) = \{w \in \pi(W(\mathfrak{k})) | w(\mathfrak{h}^+) = \mathfrak{h}^+\}. \tag{Ⅲ.2.5}$$

定理 2.8 $W(\mathfrak{h}) = W_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{k})W_R(\mathfrak{h})$.

证 由引理 1.3, $W_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{k})|\mathfrak{h}^+ = W(\mathfrak{h}^+)$. 由引理 2.7, $W_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{k}) \subset W(\mathfrak{h})$, 从而 $W_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{k})W_R(\mathfrak{h}) \subset W(\mathfrak{h})$. 任取 $w \in W(\mathfrak{h})$, 由引理 2.4, 存在 $w_1 \in W_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{k})$, 使 $w|_{\mathfrak{h}}^+ = w_1|\mathfrak{h}^+$. 于是 $ww_1^{-1}|_{\mathfrak{h}^+} = Id$, 从引理 2.3 可得 $ww_1^{-1} \in W_R(\mathfrak{h}) \subset W(\mathfrak{h})$, 因此 $w \in W(\mathfrak{h})$. □

本书第三章指出 $T-$ 正则 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0$ 的 $\mathfrak{h}_0^+$ 为 $\mathfrak{k}$ 的 Cartan 子代数, 且 Σ 中没有实根. 于是我们有下面推论.

推论 2.9 $W(\mathfrak{h}_0) \equiv W(\mathfrak{k})$.

令

$$W_\tau(\mathfrak{h}) = \{w \in W(\mathfrak{h}^C) | (\tau|_{\mathfrak{h}^+}) \circ w = w \circ (\tau|_{\mathfrak{h}^+})\}.$$

显然 $W_t(\mathfrak{h})$ 保持 $\mathfrak{h}^+$, $\mathfrak{h}$ 不变, $W_t(\mathfrak{h})$ 称作关于 $\mathfrak{h}$ 的拟 Weyl 群.

定理 2.10 $W_\tau(\mathfrak{h}) = W(\mathfrak{h})W_I(\mathfrak{h})$

证 参见 [1]. □

为了应用定理 2.8 与 2.10, 计算 $\mathfrak{h}$ 的 Weyl 群及拟 Weyl 群，就必须对每一类 Cartan 子代数确定 $\Sigma_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h})$ 与 $\Sigma_I(\mathfrak{h})$.

设 $F = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 是 Σ_n 中一个强正交系. 令 $\mathfrak{h} = C_F(\mathfrak{h}_0)$, $L = \sum_{i=1}^{l} \sqrt{-1}\mathbf{R}h_{\alpha_i}$, 作为 $\mathfrak{h}_0^+$ 的子空间 L, $\mathfrak{h}^+$, $\mathfrak{h}_0$ 有正交分解:

$$\mathfrak{h}_0 = L \dot{+} \mathfrak{h}^+ \dot{+} \mathfrak{h}_0^-, \tag{Ⅲ.2.6}$$

$$\mathfrak{h}_0^+ = L \dot{+} \mathfrak{h}^+, \tag{Ⅲ.2.7}$$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^+ + \mathfrak{h}_0^- + \sum_{i=1}^{l} \mathbf{E}_{\alpha_i}. \tag{Ⅲ.2.8}$$

任取 $\alpha \in \Sigma$, 则 $\alpha = \alpha_L + \alpha^+ + \alpha^-$, 其中 $\alpha_L \in \sqrt{-1}L$, $\alpha^+ \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$, $\alpha^- \in \mathfrak{h}^-$. 设 $\alpha_L = \sum_{i=1}^{l} a_i h_{\alpha_i}$, 则

$$\tilde{C}_F(\alpha) = \alpha^+ + \alpha^- + \sum_{i=1}^{l} a_i E_{\alpha_i}. \tag{Ⅲ.2.9}$$

记 $\tilde{\alpha} = \tilde{C}_F(\alpha)$ 为 α 在根系同构 $\tilde{C}_F : \Sigma \to \Sigma(\mathfrak{h})$ 下的像.

定理 2.11 (1) 设 $\alpha \in \Sigma$, 则 $\tilde{\alpha} \in \Sigma_I(\mathfrak{h})$ 当且仅当 $\alpha_L = \alpha^- = 0$.

(2) 设 $\alpha \in \Sigma$, 则 $\tilde{\alpha} \in \Sigma_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h})$ 当且仅当 $\alpha^+ = 0$.

证 $\tilde{\alpha} \in \Sigma_{\mathbf{R}}(\mathfrak{h})$, 当且仅当 $\tau(\tilde{\alpha}) = -\tilde{\alpha}$, 由 (2.9) $\tau(\tilde{\alpha}) = -\tilde{\alpha}$ 当且仅当 $\alpha^+ = 0$.

类似可证 (1). □

事实上，我们还有更强的结论.

引理 2.12 设 $\gamma \in \Sigma_n$, $\eta = C_\gamma(\mathfrak{h}_0)$, 则有下面结论.

(1) 设 $\alpha \in \Sigma_C$, $\tilde{C}_\gamma(\alpha) = \tilde{\alpha} \in \Sigma_I(\mathfrak{h})$, 则 $\tilde{\alpha} \in \Sigma_c(\mathfrak{h})$ 当且仅当 α 与 γ 强正交.

(2) 设 $\alpha \in \Sigma_n$, $\tilde{C}_\gamma(\alpha) = \tilde{\alpha} \in \Sigma_I(\mathfrak{h})$, 则 $\tilde{\alpha} \in \Sigma_n(\mathfrak{h})$ 当且仅当 α 与 γ 强正交.

证 设 $\alpha \in \Sigma_n$, $\tilde{\alpha} \in \Sigma_I(\mathfrak{h})$, 则根子空间 $\mathfrak{g}_\alpha \in \mathfrak{p}$. 又由定理 2.11, 即 $\alpha = \alpha^+$. 若 α 与 γ 强正交, 则由定义不难证明 $\tilde{C}_\gamma(\mathfrak{g}_\alpha) \in \mathfrak{p}$, 所以 $\tilde{\alpha} \in \Sigma_n(\mathfrak{h})$.

反之, 设 α, γ 不强正交. 因为 $\tilde{\alpha} \in \Sigma_n(\mathfrak{h})$, 则由定理 2.11, $(\alpha, \gamma) = 0$. 因而 $\alpha \pm \gamma \in \Sigma$. 又因为半单复李代数任意根链长度均不大于四, 所以过 α 的 γ 链只能为 $\alpha - \gamma, \alpha, \alpha + \gamma$. 取 $e_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$, $f_\gamma \in \mathfrak{g}_{-\gamma}$ 同上节, e_γ, f_γ 非零, 则

$$
\begin{aligned}
&[e_\gamma, [e_\alpha, f_\gamma]](\neq 0) \in \mathfrak{g}_\alpha, \\
&[f_\gamma, [e_\alpha, e_\gamma]](\neq 0) \in \mathfrak{g}_\alpha, \\
&[f_\gamma, [e_\alpha, f_\gamma]] = [e_\gamma[e_\alpha, e_\gamma]] = 0. \qquad (\text{III}.2.10)
\end{aligned}
$$

因而存在 $a \in \mathbf{C}$, 使

$$[e_\gamma[e_\alpha, f_\gamma]] + a[f_\gamma[e_\alpha, e_\gamma]] = 0. \qquad (\text{III}.2.11)$$

令

$$e_{\tilde{\alpha}} = [e_\alpha, f_\gamma] + a[e_\alpha, e_\gamma](\neq 0) \in \mathfrak{g}_{\alpha+\gamma} + \mathfrak{g}_{\alpha-\gamma}. \qquad (\text{III}.2.12)$$

由定义

$$E_\gamma = e_\gamma - f_\gamma, \qquad (\text{III}.2.13)$$

$$\tilde{\mathfrak{h}} = C_\gamma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}^+ + \mathfrak{h}^- + \mathbf{R}E_\gamma. \qquad (\text{III}.2.14)$$

由 (2.12)–(2.15), 有

$$[E_\gamma, e_{\tilde{\alpha}}] = 0. \qquad (\text{III}.2.15)$$

任取 $h \in \mathfrak{h}^C$, 则有分解 $h = h^+ + h^- + aE_\gamma$, 其中 $h^+ \in (\mathfrak{h}^+)^C$, $h^- \in (\mathfrak{h}_0^-)^C$. 则

$$[h, e_{\tilde{\alpha}}] = \alpha(h^+)e_{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha}(h)e_{\tilde{\alpha}},$$

所以 $e_{\tilde{\alpha}} \in \mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}}$. 因为 $\alpha, \gamma \in \Sigma_n$, 所以 $\tau e_\alpha = -e_\alpha$, $\tau e_\gamma = -e_\gamma$, $\tau f_\alpha = -f_\alpha$, $\tau f_\gamma = -f_\gamma$. 由 (2.16) 式有 $\tau e_{\tilde{\alpha}} = e_{\tilde{\alpha}}$. 即 $\mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}} \in \mathfrak{k}$. 于是 $\tilde{\alpha} \in \Sigma_c$.

同理可证 (1). □

从引理 2.12 利用归纳法不难证明下述定理.

定理 2.13 设 F 为 Σ_n 的强正交系, $\mathfrak{h} = C_F(\mathfrak{h}_0)$, 则

(1) 若 $\alpha \in \Sigma_n$, $\tilde{C}_F(\alpha) = \tilde{\alpha} \in \Sigma_I(\mathfrak{h})$, 则 $\tilde{\alpha} \in \Sigma_n(\mathfrak{h})$ 当且仅当 α 与 F 中偶数个元不强正交.

(2) 若 $\alpha \in \Sigma_c$, $\tilde{C}_F(\alpha) = \tilde{\alpha} \in \Sigma_I(\mathfrak{h})$, 则 $\tilde{\alpha} \in \Sigma_c(\mathfrak{h})$ 当且仅当 α 与 F 中偶数个元不强正交.

有了如上准备, 我们可以求出每一类标准 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} = C_F(\mathfrak{h}_0)$ 的 Weyl 群 $W(\mathfrak{h})$ 及拟 Weyl 群 $W_t(\mathfrak{h})$. 特别 $\mathfrak{g}$ 是典型单李代数时, 由于 $W(\mathfrak{h}^C)$ 都是由若干个文字置换及适当变号生成的有限子群, 作为它的子群 $W(\mathfrak{h})$ 与 $W_t(\mathfrak{h})$ 是不难求出的.

Ⅲ.3 Cartan 子代数与 Weyl 群的计算

前两节给出 Cartan 子代数与 Weyl 群一般的结构. 本节我们举例说明具体计算过程. 详细过程可参见本附录参考文献 [7]

例 1 $\mathfrak{g} = A_l^i$, Cartan 记号是 $AIII$.

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 是 $l+1$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^{l+1}$ 的一组标准正交基，则可设 $\mathfrak{g}^C$ 的素根系 $\alpha_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}, 1\le i\le l$. 对合自同构

$$\tau=e^{-\pi\sqrt{-1}Hi},$$

其中 $H_i\in\mathfrak{h}_0^C$ 满足 $\alpha_j(H_i)=\delta_{ij}$. 特征子代数 $\mathfrak{k}=A_{i-1}\times A_{l-i}\times T$. $\mathfrak{g}^C$ 关于 $\mathfrak{h}_0^C$ 的根系 $\Sigma=\{\lambda_t-\lambda_s|t\ne s\}$. 易看出

$$\begin{aligned}&\Sigma_C^+=\{\lambda_t-\lambda_s|1\le t<s\le i\ \text{或者}\ i\le t<s\le l+1\},\\&\Sigma_n^+=\{\lambda_t-\lambda_s|1\le t\le i,i\le s\le l,t\ne s\},\\&W(\mathfrak{k})=S_i\times S_{l+1-i},\end{aligned}$$

其中 S_i 与 S_{l+1-i} 分别为前 i 个 λ_t 与后 $l+1-i$ 个 λ_t 下标置换群.

令 $\gamma_1=\lambda_1-\lambda_{l+1},\gamma_2=\lambda_2-\lambda_l,\cdots,\gamma_i=\lambda_i-\lambda_{l-i+2}$. 则 $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i\}$ 是 Σ_n^+ 中一个极大强正交系. 记 $F(s)=\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}, 1\le s\le i$. 利用 $W(\mathfrak{k})$ 结构易证 Σ_n^+ 中所有 s 个根强正交系与 $F(s)$ 等价.

设 $\mathfrak{h}=C_{F(s)}(\mathfrak{h}_0)$, 这时 $\mathfrak{h}^+$ 由

$$\sqrt{-1}(\lambda_{s+1}-\lambda_{s+2}),\ \sqrt{-1}(\lambda_{l-s}-\lambda_{l-s+1})$$

及

$$\sqrt{-1}(\lambda_1+\lambda_{l+1}-\lambda_2-\lambda_l),\cdots,\sqrt{-1}(\lambda_s+\lambda_{l-s+2}-\lambda_{s+1}-\lambda_{l-s+1})$$

线性生成.

$W_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{k})$ 是由 $s+1,\cdots,i$ 的置换， $i+1,\cdots,l-s+1$ 的置换以及 $1,\cdots,s$ 与 $l+1,\cdots,l-s+2$ 这两组 s 元同时作相应位置的 s 元置换所生成.

而实根集可视为 $\gamma_1,\cdots,\gamma_s$, 因此 $W_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h})$ 由

$$(1,l+1),\ (2,l),\ \ldots,\ (s,l-s+2)$$

生成.

$W_I(\mathfrak{h})$ 由对换 (i,k), $s+1\le i\le k\le l-s+1$ 生成.

于是我们有下面结果.

$W(\mathfrak{h})$ 由 $(i-s)$ 元的一切置换, $(l+1-i-s)$ 元的一切置换, 两组 s 元的同位置换及相应元的对换生成.

$W_T(\mathfrak{h})$ 由 $(l+1-2s)$ 元的一切置换, 两组 s 元的一切同位置换及相应元的对换生成.

例 2 $\mathfrak{g}=B_l^i$ $(2\le i\le l-1)$, Cartan 记号为 BI 和 BII.

特征子代数 $\mathfrak{g}_1=D_i\times B_{l-i}$. 先考虑 $2i\le l$ 情形. 这时最大强正交系为 $\{\gamma_j=\lambda_j+\lambda_{2i-l+1},\gamma_{-j}=\lambda_{2i-j+1}-\lambda_j,|j=1,\cdots,i\}$, $W(\mathfrak{k})$ 是 $1,\cdots,i$ 的一切置换及偶次变号和 $i+1,\cdots,l$ 的一切置换及任意变号所生成.

若强正交根系 $F(s,h)=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_h,\gamma_{-1},\cdots,\gamma_{-s}\}$ $(0\le h\le s\le i)$, 相应的标准 Cartan 子代数为 $C_{F(s)}(\mathfrak{h}_0)=\mathfrak{h}^++\mathfrak{h}^-$, 这时 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}^+$ 由 $\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_i,\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_{2i-s},\lambda_{2i+1},\cdots,\lambda_l$ 和 $\lambda_{2i-h}+\lambda_{h+1},\cdots,\lambda_{2i-s+1}+\lambda_s$ 张成. 于是 $W_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{k})$ 由 $s+1,\cdots,i$ 这 $i-s$ 元的一切置换与变号, $i+1,\cdots,2i-s,2i+1,\cdots,l$, 这 $l-i-s$ 元的一切置换与变号, $h+1,\cdots,s$ 与 $2i-h,\cdots,2i-s+1$ 这两组 $s-h$ 元的一切同位置换与同时变号所生成. 这时 $\Sigma_R(\mathfrak{h})$ 由 $\lambda_1,\cdots.\lambda_h,\lambda_{2i-h+1},\cdots,\lambda_{2i}$ 及 $\lambda_{2i-h}-\lambda_{h+1},\cdots,\lambda_{2i-s+1}-\lambda_s$ 生成. 因此 $W(\mathfrak{h})$ 由 $s+1,\cdots,i$ 这 $i-s$ 元的一切置换与任意变号, , $i+1,\cdots,2i-s,2i+1,\cdots,l$ 这 $l-i-s$ 元的一切置换与任意变号, $1,\cdots,h,2i-h+1,\cdots,2i$, 这 $2h$ 元的一切置换与变号, 以及 $h+1,\cdots,s$ 与 $2i-h,\cdots,2i-s+1$ 这两组 $s-h$ 元一切同位置换及

同时变号, 再加上对换 $(h+1,2i-h),\cdots,(s,2i-s+1)$ 所生成. 仅当 $h=0$ 时, 要求 $1,\cdots,i$ 的变号总数为偶数. 这时 $\Sigma_I(\mathfrak{h})$ 由 $\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_{2i-s},\lambda_{2i+1},\cdots,\lambda_l$ 及 $\lambda_{2i-h}+\lambda_{h+1},\cdots,\lambda_{2i-s+1}+\lambda_s$ 生成. 因此 $W_\tau(\mathfrak{h})$ 由 $s+1,\cdots,2i-s,2i+1,\cdots,l$ 这 $l-2s$ 元的一切置换与任意变号, $1,\cdots,h,2i-h+1,\cdots,2i$ 这 $2h$ 元的一切置换与任意变号, $h+1,\cdots,s$ 与 $2i-h,\cdots,2i-s+1$ 这两组 $s-h$ 元的一切同位置换与同时变号及对换 $(h+1,2i-h),\cdots,(s,2i-s+1)$ 所生成. 仅当 $h=0$ 时, 要求 $1,\cdots,s,s+1,\cdots,i$ 变号总数为偶数.

对 $F'(s,h)=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_h,\gamma_{-1},\gamma_{-s},\lambda_{s+1}\}$ 及 $2i>l$, 可类似讨论.

Ⅲ.4 非 Riemann 局部对称空间

设 G 是非紧连通实半单李群, θ 为 G 的一个对合自同构. 令 $G^\theta=\{x\in G|\theta(x)=x\}$, G_0^θ 为 G^θ 的单位连通分支. 设 H 是 G^θ 的开子群, 于是

$$G_0^\theta\subset H\subset G^\theta.$$

齐性空间 G/H 为 (非 Riemann) 局部对称空间. 根据 Nomizu 的讨论, 局部对称空间主要可化为上述形式.

若 M 是 G/H 的覆盖空间, 则 M 也是局部对称空间. 可以证明, 存在 G 的连通覆盖群 $\bar{G}$ 及 $\bar{G}$ 上的对合自同构 $\bar{\theta}$ 与相应 $\bar{G}^{\bar{\theta}}$ 的开子群 $\bar{H}$ 使 $M\cong\bar{G}/\bar{H}$, 且有交换图

$$\begin{array}{ccc}\bar{G} & \xrightarrow{\pi} & G\\ \bar{\theta}\downarrow & & \downarrow\theta\\ \bar{G} & \xrightarrow{\pi} & G\end{array}$$

其中 π 为覆盖映射，而 $\pi(\tilde{H}) \subset H$.

特别，设 $\tilde{G}$ 是 G 的通用覆盖群，$\tilde{H}$ 为 $\tilde{G}^{\tilde{\theta}}$ 的单位连通分支，则 $\tilde{G}/\tilde{H}$ 是 G/H 的通用覆盖空间.

另一个特殊情况是，设 $G_* = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, $G_*^\theta = \{g \in G_* | gd\theta = d\theta g\}$, 则有局部对称空间覆盖映射

$$\tilde{G}/\tilde{H} \longrightarrow G/H \longrightarrow G_*/G_*^\theta.$$

因此局部对称空间分类问题，可转化为下列两个问题.

一．　局部同构分类，即单连通局部对称空间分类. 与之等价的是，实半单李代数的对合自同构共轭分类. 在附录 I, II 中本书作者已详尽地讨论了这些内容.

二．　G_*/G_*^θ 的基本群的子群共轭分类. 事实上 G_*/G_*^θ 的基本群是 Abel 群. 因此我们只须计算 G_*/G_*^θ 的基本群. 本节我们将给出 $\pi(G_*/G_*^\theta)$ 算法.

本节恒假定 $G = \mathrm{Int}\mathfrak{g}$, K 为 G 的李代数为 $\mathfrak{k}$ 的极大紧群. (事实上，K 为 $\mathfrak{k}$ 的内自同构群在 $\mathfrak{g}$ 上的自然扩张). 由极分解 G 微分同胚 $K \times P$, 其中 $P = \{e^{\mathrm{ad}x} | x \in \mathfrak{p}\}$.

设 σ 为 $\mathfrak{g}$ 上与 Cartan 对合 τ 可交换的对合自同构. $\mathfrak{g}_1$ 为 σ 的特征子代数. $\bar{\tau}$ 为 τ 在 $\mathfrak{g}_1$ 上限制. 则 $\bar{\tau}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 对合. 令

$$\mathfrak{k}_1 = \{x \in \mathfrak{g}_1 | \bar{\tau}(x) = x\} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_1,$$
$$\mathfrak{p}_1 = \{x \in \mathfrak{g}_1 | \bar{\tau}(x) = -x\} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_1,$$

则 $\mathfrak{g}_1$ 有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1.$$

设

$$G_1 = \{g \in G | g\sigma = \sigma g\},$$
$$K_1 = \{k \in G_1 | \bar{\tau}(k) = k\} = K \cap G_1,$$

则 K_1 为李代数是 $\mathfrak{k}_1$ 的 G_1 的极大紧子群. G_1 有极分解，即 G_1 微分同胚 $K_1 \times P_1$, 其中

$$P_1 = \{e^{\mathrm{ad}x} | x \in \mathfrak{p}_1\} = G_1 \cap P.$$

显然我们有齐性空间的纤维映射

$$K/K_1 \longrightarrow G/K_1 \longrightarrow G/K \cong P,$$

$$P_1 \cong G_1/K_1 \longrightarrow G/K_1 \longrightarrow G/G_1.$$

由纤维映射同伦群的长正合序列，有

定理 4.1 $\pi_n(G/G_1) \cong \pi_n(K/K_1)$, $n = 1, 2, \cdots$

证 因为 P 与 P_1 同胚于欧氏空间 $\mathfrak{p}$ 与 $\mathfrak{p}_1$, 所以 P, P_1 是零伦的. 因此

$$\pi_n(P) = \pi_n(P_1) = 0, \ n = 1, 2, \cdots.$$

于是

$$\pi_n(K/K_1) \cong \pi_n(G/K_1) \cong \pi_n(G/G_1). \qquad \square$$

若 $Z(\mathfrak{k}) = 0$, 则 K 是半单李群，而 σ 导出 K 的对合自同构 $\mathrm{Ad}\sigma$, 其特征子群为 K_1, 所以 K/K_1 是紧 Riemann 对称空间. 易证

$$K/K_1 \cong \mathrm{Int}(K)/\mathrm{Int}(K)^\sigma,$$

其中

$$\mathrm{Int}(K)^\sigma = \{k \in \mathrm{Int}\mathfrak{k} | \sigma k = k\sigma\}.$$

若 $Z(\mathfrak{k}) \neq 0$. 则有理想直和分解

$$\mathfrak{k} = Z(\mathfrak{k}) \oplus [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}].$$

而 K 有拓扑直积分解

$$K = Z(K) \times K',$$

其中 K' 为李代数为 $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ 的连通子群. $Z(K)$ 为李代数为 $Z(\mathfrak{k})$ 的连通子群. 因为 $\mathfrak{g}$ 是单李代数, 所以 $Z(K) \cong S^1$.

因为 $\sigma(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$. 所以有 $\sigma(Z(\mathfrak{k})) = Z(\mathfrak{k})$, $\sigma([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]) = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$. 因此

$$\mathrm{Ad}\sigma(Z(K)) = Z(K),$$

$$\mathrm{Ad}\sigma(K') = K'.$$

如果 $\mathfrak{k}_1 \cap Z(\mathfrak{k}) = 0$, 则 $\mathfrak{k}_1 \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$, 于是

$$K_1 \subset K' \times \{\pm e\},$$

其中 e 为 $Z(\mathfrak{k}) \cong S^1$ 的单位元, 而 $-e$ 为 e 的对径点. (事实上 $-e = \tau$). 于是

$$K/K_1 \cong K'/K_1' \times (S^1/\{\pm e\}) \cong K'/K_1' \times S^1,$$

其中 $K_1' = K' \cap K_1 = K' \times \{e\}$.

如果 $\mathfrak{k}_1 \cap Z(\mathfrak{k}) \neq 0$, 则 $Z(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{k}_1$. 进而 $Z(K) \subset K_1$, 于是

$$K/K_1 \cong K'/K_1'.$$

易证, K'/K_1' 是以 $\mathrm{Ad}\sigma$ 为 Cartan 对合的紧 Riemann 对称空间.

由定理 4.1 及上述讨论，我们有

定理 4.2 (1) 设 $Z(\mathfrak{k})=0$ 或者 $Z(\mathfrak{k})\neq 0$, 而 $Z(\mathfrak{k})\cap\mathfrak{k}_1\neq 0$. 则非 Riemann 局部对称空间同伦群 $\pi_n(G/G_1)$ 同构于紧 Riemann 对称空间的同伦群 $\pi_n(K'/K_1)$, 特别其基本群 $\pi_1(G/G_1)$ 同构于 $\pi_1(K'/K_1)$ (若 $Z(\mathfrak{k})=0$, 则 $K'=K$).

(2) 如果 $Z(\mathfrak{k})\neq 0$, 且 $Z(\mathfrak{k})\cap\mathfrak{k}_1=0$, 则

$$\pi_1(G/G_1)\cong\pi_1(K'/K_1')\times\mathbf{Z}$$

$$\pi_n(G/G_1)\cong\pi_n(K'/K_1')\quad n\geq 1.$$

证 因为

$$\pi_n(S^1)=\begin{cases}\mathbf{Z} & n=1;\\ 0 & n>1.\end{cases}$$

由定理 4.1, 直接可得命题.

紧 Riemann 对称空间的基本群是已知，利用定理 4.2, 不难得出所有非 Riemann 对称空间的基本群 (具体结果参见 [6]), 从而最终完成了非 Riemann 局部对称空间的分类.

附录 III 参考文献

[1] Hirai. T, *A note on automorphisms of real semisimple Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan, **28**(1976), 250-256.

[2] 严志达，李代数讲义，广西民族学院， 1978.

[3] 严志达， Lie 群和微分几何，人民教育出版社， 1960.

[4] 严志达，半单纯 Lie 群 Lie 代数表示论，上海科技出版社，1962.

[5] 杨奇, 对称空间分类, 数学年刊, 5A (4) (1984), 425-436.

[6] 姜才坤, 关于非紧对称空间的基本群, 数学年刊, 8A (5) (1987), 612-620.

[7] 侯自新, 张知学, 实半单李代数 Weyl 群的结构, 中国科学, A 辑, No.4 (1985), 311-319.

[8] 陈仲沪, 论实半简单李代数中的 Cartan 子代数, 科学记录, 新辑 3 (1959), 172-175.

[9] 李根道, 论实半单李代数的 Cartan 子代数的内共轭分类, 数学学报, **15** (1965), 444-454.

[General Information]
书名=实半单李代数
作者=严志达著
页数=276
SS号=10306866
DX号=
出版日期=1998年10月第1版
出版社=南开大学出版社